

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION MULTICRITÈRES DE LA CONCEPTION D'UN RESSORT
HÉLICOÏDAL TUBULAIRE EN MATÉRIAU COMPOSITE

BENOÎT LECARPENTIER

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)

OCTOBRE 2004



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01353-2

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01353-2

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

OPTIMISATION MULTICRITÈRES DE LA CONCEPTION D'UN RESSORT
HÉLICOÏDAL TUBULAIRE EN MATÉRIAU COMPOSITE

Présenté par : LECARPENTIER Benoît

En vue du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

A été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. VADEAN Aurelian, Ph. D., président

M. TROCHU François, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. BOUKHILI Rachid, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. BARIL Claude, M.B.A., membre

à Anne-Sophie.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce projet n'aurait pas été possible sans l'aide et les conseils de nombreuses personnes. Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de maîtrise, M. François Trochu, pour m'avoir proposé le sujet, guidé et fait partager ses connaissances. Sa méthodologie de travail me sera précieuse tout au long de ma carrière. J'exprime aussi ma reconnaissance à M. Rachid Boukhili, mon codirecteur, qui a accepté de suivre l'aspect expérimental.

Je remercie également M. Christian Charles Martel, technicien au CRASP, pour son aide et sa patience lors de la fabrication des ressorts qui a parfois été laborieuse ainsi que pour avoir assuré les meilleures conditions possibles aux laboratoires.

J'exprime ma gratitude aux étudiants Grégoire Hédouin, Marion Touboul, Sébastien Boutier, MÉRIL Dehez, pour leur collaboration sur le projet numérique ou expérimental. Je voudrais aussi remercier la compagnie Composites Atlantic et son président, M. Maurice Guitton, pour avoir fourni les méthodes et matériaux nécessaires à ce projet, ainsi que son enthousiasme et ses encouragements.

Je souhaite par ailleurs remercier les étudiants et membres du personnel qui m'ont aidé lors de ces années passées au sein du CRASP, et en particulier Oussama Zebdi avec lequel la collaboration fut naturelle et très agréable.

Enfin un grand merci à ma famille qui fut d'un soutien constant au long de ce projet.

RÉSUMÉ

L'apparition de nouvelles techniques de fabrication amène les matériaux composites à concurrencer les matériaux classiques, tels que l'acier et l'aluminium, pour la production de divers composants d'un système mécanique. Parmi ceux-ci on compte les ressorts hélicoïdaux, pour lesquels Composites Atlantic Ltd (Lünenburg, Nouvelle-Écosse) a proposé un procédé de fabrication novateur, mettant en jeu des tubes tressés en fibres de verre et une résine époxy. Dans un premier temps, on présente une revue bibliographique des études ayant déjà porté sur ce type de structures, aussi bien sur leurs performances statiques que dynamiques ou vibratoires. On décrit ensuite les principes de recherche opérationnelle (*Operational Research*) qui mèneront à utiliser une approche d'optimisation multicritères dans le processus de conception.

Dans une seconde étape, la démarche de modélisation par éléments finis est exposée dans le cas d'un ressort en compression axiale. A cette fin, le logiciel SYSPLY est utilisé pour analyser par éléments finis la structure composite d'un ressort hélicoïdal. Le ressort est discrétisé ensuite en éléments solides, et le composite est modélisé par un matériau orthotrope épais. Un écart subsiste entre les formules analytiques et le calcul par éléments finis, à cause des approximations effectuées pour établir les formules analytiques. Pour améliorer la précision des calculs, on construit par krigeage dual à partir des résultats de SYSPLY une fonction de correction pour la raideur et les contraintes afin d'évaluer le plus précisément possible la performance statique des ressorts.

Après cette étape de modélisation, on se penche sur les stratégies évolutionnistes capables en un seul calcul de donner l'ensemble des solutions optimales au sens de Pareto pour un problème d'optimisation multicritères. Le choix se porte sur l'algorithme NSGA-II, disponible en langage C++ par l'intermédiaire de la librairie EO (*Evolving Objects*). On développe un logiciel de conception inverse qui calcule les performances

du ressort selon la méthode employée précédemment en intégrant les contraintes du cahier des charges. Ce logiciel est implémenté pour différents types de composites, selon leur mode de tressage, de même que pour l'acier. Ceci permet une comparaison des performances de chaque matériau pour un même cahier des charges. Les tubes tressés en verre/époxy s'avèrent être intéressants pour leur légèreté et leur plus grande flexibilité.

Enfin on procède à une validation expérimentale des performances statiques du ressort à partir d'échantillons de même géométrie. Malgré la présence de défauts, la raideur expérimentale s'approche de celle prévue par l'étude théorique. En revanche, la rupture du matériau ne peut pas être prévue de façon fiable car les défauts génèrent des concentrations de contraintes qui abaissent d'autant la résistance de la structure. Cette étude est toutefois incomplète pour valider les performances de l'ensemble des ressorts considérés dans le processus d'optimisation, car il aurait fallu disposer d'échantillons de meilleure qualité et en quantité bien plus importante, pour étudier l'influence de chaque paramètre. On propose donc un plan de production de différents ressorts, prenant en compte l'influence de chaque paramètre géométrique, ainsi que des caractéristiques du matériau (en se limitant au tube tressé en verre/époxy).

En définitive, grâce au logiciel de conception inverse implémenté, il est possible de trouver le meilleur matériau composite pour optimiser plusieurs critères simultanément. Si le procédé de fabrication peut être rendu plus fiable à l'avenir, on pourra élargir cette étude à d'autres types de composites, comme ceux renforcés par exemple par des fibres de carbone. Ceci ouvrira de nouvelles applications industrielles aux ressorts hélicoïdaux tubulaires en composites.

ABSTRACT

Thanks to new manufacturing processes, composites are becoming more competitive with usual materials such as steel or aluminium to produce specific components of mechanical systems. Among these components figure helical springs made by Composites Atlantic Ltd (Lunenburg, Nova-Scotia) out of braided glass fibers and epoxy resin. First of all, previous investigations on this topic are summed up in a bibliographical review describing the static and dynamic performances and also including the vibration response of such structures. Then the general principles of Operational Research that lead to a multi-objective optimization process are described.

In a second stage, accurate modeling of a helical spring subjected to axial compression is carried out by finite element analysis with SYSPLY, a software dedicated to composite materials. The final model is made of solid elements (by opposition to shell elements) and braided composites are modeled as a thick orthotropic material. A difference remains between analytical formulas and finite element results, because of the basic assumptions necessary to establish analytical formulas. Correction functions for the analytical formulas are constructed with SYSPLY by dual kriging, in order to evaluate the spring performance as accurately as possible but without running finite element analyses for each evaluation.

After the modeling phase, evolutionary strategies capable of reaching the optimal set of a multi-objective problem (equivalent to Pareto non-dominated set) are evaluated in a single run, without former knowledge of the problem. In the end it was decided to use NSGA-II algorithm (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm), available in C++ language through the Evolving Objects (EO) library. An optimum design software is then devised to evaluate the spring static performance with the previously exposed method, while respecting a series of technological constraints. This software tool is devised for glass/epoxy composites with various types of braid and for steel. This gives

the opportunity to compare the performances of each material for the same constraints in a multi-objective approach. In the end, braided composite tubes of glass/epoxy appear to be interesting for their lightness and flexibility.

Then the static performance of composite springs is evaluated experimentally for samples with the same geometry. In spite of visible imperfections of the structures due to the manufacturing process, the experimental stiffness is close to the theoretical one. However, it is impossible to predict an experimental critical load because defects in the structure create stress concentrations and consequently, the material strength seems lower. In order to check the whole set of springs involved in the optimization process, a larger batch of samples would have been needed without manufacturing defects. That's why we expose an experimental design for producing springs with various geometrical parameters and material parameters but limited to braided tubes of glass/epoxy.

Finally, using the design software developed in C++ enables to find the **optimal material and geometry of the tubular helical spring** that will optimize simultaneously several contradictory objectives. Assuming that the manufacturing process will become more reliable, it will be possible to consider other composite materials, such as those reinforced with carbon fibers, that could produce stiffer structures or allow a more important gain in weight. This can open a whole range of new industrial applications for composite tubular helical springs.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-------------|
| DÉDICACE | iv |
| REMERCIEMENTS | v |
| RÉSUMÉ..... | vi |
| ABSTRACT | viii |
| TABLE DES MATIÈRES | x |
| LISTE DES TABLEAUX..... | xiv |
| LISTE DES FIGURES | xv |
| LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS | xix |
| LISTE DES ANNEXES | xxi |
| Chapitre 1 : Étude bibliographique et position du problème | 2 |
| 1.1 Généralités sur les ressorts hélicoïdaux | 2 |
| 1.1.1 Fonction des ressorts | 2 |
| 1.1.2 Résultats de la mécanique des ressorts hélicoïdaux cylindriques circulaires | 3 |
| 1.2 Ressorts en matériaux composites | 6 |
| 1.2.1 Ressorts à lame de suspension automobile | 6 |
| 1.2.2 Ressorts circulaires et elliptiques | 8 |
| 1.2.3 Ressorts hélicoïdaux..... | 9 |
| 1.3 Optimisation multicritères..... | 11 |
| 1.3.1 Objectif recherché et concepts fondamentaux | 11 |

| | | |
|-------|---|----|
| 1.3.2 | Application de l'optimisation multicritères à la conception de ressorts hélicoïdaux | 13 |
|-------|---|----|

Chapitre 2 : Approximation par éléments finis du comportement mécanique du ressort.....16

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1 | Intérêts et difficultés de l'analyse par éléments finis | 16 |
| 2.2 | Modélisation des déplacements..... | 17 |
| 2.2.1 | Modèle de calcul en option coque..... | 17 |
| 2.2.2 | Modèle de calcul tridimensionnel | 24 |
| 2.3 | Modélisation des contraintes..... | 28 |
| 2.3.1 | Modélisation avec l'option coque | 28 |
| 2.3.2 | Modélisation tridimensionnelle..... | 30 |
| 2.3.3 | Raffinement du modèle : ajout de tours morts aux extrémités | 34 |
| 2.4 | Modélisation du matériau composite | 36 |
| 2.4.1 | Pli solide pour un angle de tressage donné | 36 |
| 2.4.2 | Stratifiés avec différents angles de tressage..... | 39 |
| 2.5 | Bilan | 42 |

Chapitre 3 : Calcul des fonctions-objectifs43

| | | |
|-------|--|----|
| 3.1 | Analyse de sensibilité des paramètres..... | 43 |
| 3.1.1 | Constante de raideur du ressort..... | 43 |
| 3.1.2 | Contrainte maximale de torsion | 47 |
| 3.1.3 | Autres fonctions-objectifs | 49 |
| 3.2 | Principes des fonctions de correction..... | 52 |
| 3.2.1 | Principe d'élaboration et objectifs | 52 |
| 3.2.2 | Plan d'expérience | 54 |
| 3.2.3 | Algorithme d'apprentissage | 55 |
| 3.2.4 | Interpolation par krigeage dual | 55 |
| 3.3 | Élaboration des fonctions d'erreur | 57 |
| 3.3.1 | Constante de raideur..... | 57 |

| | | |
|-------|--------------------------------------|----|
| 3.3.2 | Contrainte maximale de torsion | 60 |
| 3.4 | Réponse au flambage | 62 |
| 3.4.1 | Présentation du phénomène..... | 62 |
| 3.4.2 | Évaluation par éléments finis | 62 |
| 3.4.3 | Influence des paramètres..... | 64 |
| 3.5 | Bilan | 66 |

Chapitre 4 : Optimisation multicritères.....67

| | | |
|-------|---|----|
| 4.1 | Méthodes usuelles de conception inverse des ressorts hélicoïdaux | 67 |
| 4.1.1 | Méthode traditionnelle de calcul des ressorts à partir du diamètre d'enroulement | 67 |
| 4.1.2 | Méthode de calcul des ressorts à partir de l'encombrement | 69 |
| 4.1.3 | Optimisation du poids, du volume ou de la hauteur..... | 69 |
| 4.1.4 | Étude fondamentale pour un ressort hélicoïdal tubulaire ou non..... | 71 |
| 4.2 | Algorithmes d'évolution pour les problèmes multicritères..... | 74 |
| 4.2.1 | Rappels sur les algorithmes d'évolution | 74 |
| 4.2.2 | Opérateurs de base | 75 |
| 4.2.3 | Algorithme NSGA II..... | 78 |
| 4.3 | Fonctionnalité de l'algorithme | 80 |
| 4.3.1 | Paramètres définissant les individus | 80 |
| 4.3.2 | Fonctions-objectifs disponibles..... | 81 |
| 4.3.3 | Fonctions-contraintes disponibles..... | 82 |
| 4.3.4 | Opérateurs de l'algorithme..... | 82 |
| 4.3.5 | Édition des résultats | 83 |
| 4.4 | Résultats préliminaires de l'algorithme | 84 |
| 4.4.1 | Sans fonction-contrainte..... | 84 |
| 4.4.2 | Avec le respect du critère de rupture pour la charge à bloc | 86 |
| 4.4.3 | Étude à partir d'un cahier des charges | 87 |
| 4.5 | Comparaison des matériaux | 89 |
| 4.5.1 | Intérêt de l'utilisation des composites..... | 89 |

| | | |
|--|--|------------|
| 4.5.2 | Comparaison fondamentale..... | 90 |
| 4.5.3 | Domaine d'applications potentielles..... | 91 |
| 4.6 | Bilan | 92 |
| Chapitre 5 : Validation expérimentale du comportement mécanique du ressort composite..... | | 93 |
| 5.1 | Caractéristiques des ressorts hélicoïdaux testés..... | 93 |
| 5.1.1 | Paramètres géométriques et fluctuations éventuelles..... | 93 |
| 5.1.2 | Paramètres matériaux et contrôle de qualité | 94 |
| 5.2 | Méthodes usuelles de tests et adaptation aux matériaux composites..... | 95 |
| 5.2.1 | Méthodes pour tester un ressort métallique | 95 |
| 5.2.2 | Difficultés posées par les matériaux composites | 96 |
| 5.3 | Analyse des résultats expérimentaux | 98 |
| 5.3.1 | Linéarité de la réponse | 98 |
| 5.3.2 | Constante de raideur..... | 99 |
| 5.3.3 | Charge maximale admissible et modes de rupture observés..... | 101 |
| 5.4 | Validation et futurs travaux..... | 102 |
| 5.4.1 | Validation expérimentale des formules théoriques | 102 |
| 5.4.2 | Plan d'expérience pour une validation expérimentale complète..... | 103 |
| 5.5 | Conclusion sur la validation expérimentale | 106 |
| RECOMMANDATIONS..... | | 110 |
| RÉFÉRENCES..... | | 111 |
| ANNEXES..... | | 116 |

LISTE DES TABLEAUX

| | | |
|---------------|--|-----|
| Tableau 2.1 : | Écart entre la constante de raideur analytique et calculée par éléments finis en fonction du nombre de spire N | 20 |
| Tableau 2.2 : | Écart entre la raideur analytique et calculée par éléments finis en fonction du diamètre d'enroulement D | 21 |
| Tableau 2.3 : | Récapitulatif des différentes contraintes dans le ressort hélicoïdal tubulaire composite sollicité en compression axiale ($F=100\text{ N}$) | 31 |
| Tableau 2.4 : | Constantes d'un pli unidirectionnel à 0° en verre/époxy ($V_f = 60\%$) | 36 |
| Tableau 2.5 : | Constantes mécaniques de plis tressés en verre/époxy ($V_f = 60\%$) en fonction de l'angle de tressage, d'après Zebdi (2004) | 37 |
| Tableau 2.6 : | Valeurs des résistances du pli en fonction de l'angle de tressage | 38 |
| Tableau 3.1 : | Erreur moyenne (%) de la fonction de correction pour la raideur du ressort (validation croisée effectuée pour différents paramètres de la méthode d'interpolation du krigage dual) | 57 |
| Tableau 3.2 : | Erreur moyenne en % de la fonction de correction pour la contrainte maximale (validation croisée effectuée pour différents paramètres de la méthode d'interpolation du krigage dual) | 60 |
| Tableau 4.1 : | Gamme de variation des paramètres par défaut | 84 |
| Tableau 4.2 : | Gamme des paramètres pour résoudre le cahier des charges | 88 |
| Tableau 4.3 : | Comparaison des propriétés intrinsèques de matériaux constitutifs des ressorts hélicoïdaux | 89 |
| Tableau 5.1 : | Évaluation de la linéarité de la réponse et de la raideur des ressorts | 99 |
| Tableau 5.2 : | Plan d'expérience complet pour les paramètres matériaux, à partir d'un seul moule et d'un seul type de tresse | 104 |
| Tableau 5.3 : | Plan factoriel d'expérience pour les paramètres géométriques, en fixant le diamètre intérieur $d_{int} = 17\text{ mm}$ et l'épaisseur du matériau $e = 4\text{ mm}$ | 105 |

LISTE DES FIGURES

| | | |
|--------------|--|----|
| Figure 1.1 : | Définition du module de résilience | 2 |
| Figure 1.2: | Paramètres géométriques dans un ressort hélicoïdal cylindrique | 3 |
| Figure 1.3: | Contraintes dans la section du fil du ressort | 4 |
| Figure 1.4: | Ressorts à lame en acier et en matériau composite | 7 |
| Figure 1.5: | Ressort circulaire à bord plat, de demi angle α | 8 |
| Figure 1.6: | Ensemble de Pareto d'une optimisation multicritères (minimiser la masse et l'inverse de la raideur), représenté dans l'espace des fonctions-objectifs..... | 13 |
| Figure 1.7: | Paramètres du ressort hélicoïdal tubulaire composite à plis tressés..... | 14 |
| Figure 1.8: | Comparaison de la masse en fonction de la raideur du ressort, par rapport à un ressort de base en acier de masse m_0 et de raideur k_0 , pour 3 matériaux, d'après Gobbi et Mastinu (2001a)..... | 15 |
| Figure 2.1 : | Maillage du ressort et affectation du matériau en option coque | 17 |
| Figure 2.2 : | Modélisation de la compression axiale | 18 |
| Figure 2.3: | Vérification de la linéarité de la réponse du ressort..... | 19 |
| Figure 2.4 : | Dépendance de la constante de raideur k_{EF} en fonction de l'inverse du nombre de spire $1/N$ | 20 |
| Figure 2.5 : | Influence du diamètre d'enroulement sur la raideur k_{EF} du ressort | 21 |
| Figure 2.6 : | Influence du rapport d_{int}/e sur l'écart de la raideur à la théorie | 23 |
| Figure 2.7 : | Maillage d'un ressort à 4 spires en éléments volumiques..... | 24 |
| Figure 2.8 : | Schéma d'une maille volumique quadratique (20 nœuds de calcul)..... | 24 |
| Figure 2.9: | Influence du diamètre du fil du ressort et de l'indice sur l'écart entre théorie et calcul par éléments finis pour un matériau isotrope..... | 25 |
| Figure 2.10: | Influence de l'indice du ressort et de l'épaisseur du matériau sur l'écart de raideur..... | 26 |
| Figure 2.11: | Influence de l'angle d'hélice α et de l'épaisseur du matériau e sur l'écart de raideur | 27 |

| | | |
|---------------|---|----|
| Figure 2.12: | Modélisation d'un pli tressé comme superposition de 2 plis unidirectionnels | 28 |
| Figure 2.13 : | Contraintes de cisaillement σ_{xy} à travers l'épaisseur du matériau pour un stratifié d'unidirectionnels | 29 |
| Figure 2.14 : | Référentiel local pour chaque élément..... | 30 |
| Figure 2.15 : | Contraintes de cisaillement dans la section du fil du ressort | 31 |
| Figure 2.16 : | Distribution de σ_{xy} dans le ressort en compression axiale..... | 32 |
| Figure 2.17 : | Distribution du critère quadratique de Tsai-Wu dans le ressort..... | 33 |
| Figure 2.18 : | Ajout des demi-tours morts aux extrémités du ressort..... | 34 |
| Figure 2.19 : | Influence de l'épaisseur du matériau e et du pas p sur l'écart de contraintes maximales | 35 |
| Figure 2.20 : | Influence de l'angle de l'hélice α et de l'épaisseur du matériau e sur l'écart de contraintes maximales..... | 35 |
| Figure 2.21 : | Évolution du module de cisaillement G_{xy} selon l'angle de tressage $\pm\theta$ | 37 |
| Figure 2.22 : | Comparaison des contraintes calculées dans chaque pli par la théorie et par éléments finis, pour un ressort sous une charge $F=1.424\text{ N}$ | 41 |
| Figure 3.1 : | Sensibilité de l'écart en fonction du diamètre d'enroulement D | 44 |
| Figure 3.2 : | Influence de l'indice du ressort C sur l'écart de raideur | 45 |
| Figure 3.3 : | Influence de l'angle de l'hélice α sur l'écart de raideur..... | 45 |
| Figure 3.4 : | Influence de l'élancement du fil e/d_{ext} sur l'écart de raideur | 46 |
| Figure 3.5 : | Influence du nombre de spires N sur l'écart de raideur | 46 |
| Figure 3.6 : | Sensibilité de l'écart relatif pour la contrainte maximale de torsion | 47 |
| Figure 3.7 : | Influence de l'indice du ressort C sur l'écart de contraintes..... | 48 |
| Figure 3.8 : | Influence de l'angle de l'hélice α sur l'écart de contraintes | 48 |
| Figure 3.9 : | Influence du rapport e/d_{ext} sur l'écart de contraintes maximales | 49 |
| Figure 3.10 : | Influence du nombre de spires N sur l'écart de contraintes..... | 49 |
| Figure 3.11 : | Répartition des contraintes de torsion σ_{xy} et de flexion σ_{xx} dans une spire d'un ressort en compression axiale | 50 |
| Figure 3.12 : | Liens entre les différentes fonctions-objectifs | 52 |

| | | |
|---------------|---|----|
| Figure 3.13 : | Évolution de l'écart type de l'estimateur de la raideur lors de l'ajout de points de mesures déterminés par l'algorithme d'apprentissage..... | 58 |
| Figure 3.14 : | Influence de C et α sur la raideur pour $e/d_{ext}=0.3$, $N=4$ et $\pm\theta = 45^\circ$... | 58 |
| Figure 3.15 : | Influence de e/d_{ext} et N sur la raideur pour $C=5$, $\alpha=15^\circ$ et $\theta=45^\circ$ | 59 |
| Figure 3.16 : | Influence de C et θ sur la raideur pour $e/d_{ext}=0.4$, $\alpha=15^\circ$ et $N=4$... | 59 |
| Figure 3.17 : | Évolution de l'écart type de l'estimateur de la contrainte maximale lors de l'ajout de points de mesures déterminés par l'algorithme d'apprentissage..... | 60 |
| Figure 3.18 : | Influence de C et e/d_{ext} sur l'écart relatif dans l'évaluation des contraintes pour $\alpha=0.4$, $N=4$ et $\theta=45^\circ$ | 61 |
| Figure 3.19 : | Influence de C et α sur l'écart relatif dans l'évaluation des contraintes pour $e/d_{ext}=0.3$, $N=4$ et $\theta=45^\circ$ | 61 |
| Figure 3.20 : | Évolution de l'écart type de la déflexion critique de flambage en fonction du nombre de points rajoutés par algorithme d'apprentissage | 64 |
| Figure 3.21 : | Influence de l'élancement du ressort et de l'angle de tressage sur la sensibilité au flambage d'Euler | 65 |
| Figure 3.22 : | Influence du rapport d'épaisseur e/d_{ext} et de débattement p/d_{ext} sur la sensibilité au flambage d'Euler | 65 |
| Figure 3.23 : | Étapes de calcul pour l'évaluation des fonctions-objectifs | 66 |
| Figure 4.1 : | Principe de calcul de conception des ressorts hélicoïdaux classiques .. | 68 |
| Figure 4.2 : | Détermination de C à partir de D_e ou D_i , d'après Duchemin (1986) | 69 |
| Figure 4.3 : | Détermination de l'indice C en fonction du paramètre B et de l'optimisation souhaitée, d'après Duchemin (1986) | 70 |
| Figure 4.4 : | Sélection par le rang avec le principe de non-domination de Pareto | 76 |
| Figure 4.5 : | Schéma de fonctionnement de l'algorithme NSGA-II..... | 79 |
| Figure 4.6 : | Maximisation de la raideur et minimisation de la masse, sans contraintes, pour un seul angle de tressage | 84 |
| Figure 4.7 : | Comparaison des fronts de Pareto pour différents modes de tressage .. | 85 |

| | | |
|---------------|--|-----|
| Figure 4.8 : | Maximisation de la raideur et minimisation de la masse avec le respect du critère de Tsai-Wu à la charge à bloc du ressort, pour un seul angle de tressage | 86 |
| Figure 4.9 : | Fronts de Pareto pour différents modes de tressage, avec le respect du critère de Tsai-Wu à la charge à bloc du ressort | 87 |
| Figure 4.10 : | Fronts de Pareto obtenus d'après le cahier des charges, pour 2 modes de tressage..... | 88 |
| Figure 4.11 : | Fronts de Pareto obtenus pour une minimisation de la masse et maximisation de la raideur pour différents matériaux. | 90 |
| Figure 4.12 : | Fronts de Pareto pour les mêmes données que précédemment, en ajoutant la contrainte de déflexion minimale admissible $\delta_{ad} > 5 \text{ mm}$.. | 91 |
| Figure 4.13 : | Fronts de Pareto obtenus d'après le cahier des charges, en intégrant les contraintes technologiques sur l'indice du ressort | 91 |
| Figure 5.1 : | Écrasement de la section circulaire en ellipse..... | 94 |
| Figure 5.2 : | Montage de compression axiale d'un ressort sur la machine MTS | 95 |
| Figure 5.3 : | Montage pour la mesure de la déformation sur une demi-spire..... | 96 |
| Figure 5.4 : | Contraintes et critère de Tsai-Wu prévus dans chaque pli du stratifié.. | 97 |
| Figure 5.5 : | Transition et phase linéaire lors de la compression axiale du ressort R1 | 98 |
| Figure 5.6 : | Contact entre le ressort et le plateau de chargement du montage | 98 |
| Figure 5.7 : | Allure de la réponse des différents ressorts en phase linéaire..... | 99 |
| Figure 5.8 : | Défauts géométriques du ressort causés lors de l'enroulement | 100 |
| Figure 5.9 : | Forme de la section des échantillons..... | 100 |
| Figure 5.10 : | Aspect de surface des échantillons..... | 100 |
| Figure 5.11 : | Apparition du blanchissement dans les zones les plus sollicitées du ressort <i>R1</i> | 101 |
| Figure 5.12 : | Apparition du blanchissement dans la zone la plus sollicitée de <i>R2</i> ... | 101 |
| Figure 5.13 : | Mise en place d'une tresse plus petite que le moule rigide..... | 104 |

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

| | |
|----------------|---|
| α | Angle de l'hélice |
| β | Angle de torsion |
| γ | Déformation de cisaillement |
| C | Indice du ressort |
| D | Diamètre d'enroulement moyen du ressort |
| D_i | Diamètre d'enroulement intérieur du ressort |
| D_e | Diamètre d'enroulement extérieur du ressort |
| d | Diamètre du fil plein du ressort |
| d_{int} | Diamètre intérieur du fil tubulaire du ressort |
| d_{ext} | Diamètre extérieur du fil tubulaire du ressort |
| d_i | Diamètre intérieur du $i^{ème}$ pli du stratifié |
| δ | Déflexion du ressort au point d'application de la charge |
| δ_{cr} | Déflexion critique de flambage |
| δ_{max} | Déflexion admissible par le ressort d'après les critères de rupture |
| δ_B | Déflexion à bloc |
| E | Module élastique du matériau |
| E_1 | Module de Young longitudinal du composite |
| ϵ | Déformation |
| F | Charge appliquée |
| f_R | fréquence de résonance du ressort |
| G | Module de cisaillement du matériau isotrope |
| G_{xy} | Module de cisaillement plan du composite à renfort tressé |
| G_{12} | Module de cisaillement plan d'un pli unidirectionnel |
| G_{eq} | Module de cisaillement plan équivalent du stratifié |
| J | Moment d'inertie de torsion |
| K | Facteur de Wahl |
| k | Constante de raideur |

| | |
|-------------------|---|
| k_{EF} | Constante de raideur évaluée par éléments finis |
| $k_{théo}$ | Constante de raideur analytique |
| l_0 | Longueur libre du ressort |
| l_{tot} | Longueur totale du fil du ressort |
| M_t | Moment de torsion équivalent |
| m | Masse du ressort |
| N | Nombre de spires actives |
| n | Nombre de plis du stratifié |
| ν | Coefficient de Poisson |
| p | Pas de l'hélice |
| P | Charge appliquée |
| P_B | Charge à bloc du ressort (contact spire-spire) |
| P_{max} | Charge maximale admissible par le ressort d'après les critères de rupture |
| P_{cr} | Charge critique de flambage |
| ρ | Masse volumique du matériau |
| ρ_v | Taux de vide |
| σ | Contrainte au sein du matériau |
| σ_{xy} | Contrainte de cisaillement |
| σ_{ultime} | Contrainte ultime du matériau |
| θ | Angle de tressage des fibres |
| θ_i | Angle de tressage des fibres du $i^{ème}$ pli |
| τ_{xy} | Contrainte de torsion (ou de cisaillement, équivalent à σ_{xy}) |
| τ_{EF} | Contrainte de torsion évaluée par éléments finis |
| τ_B | Contrainte à bloc du ressort (contact spire-spire) |
| τ_{ultime} | Résistance ultime en torsion (ou cisaillement plan) |
| τ_{mut} | Taux de mutation d'un chromosome |
| U | Énergie élastique |
| U_s | Énergie élastique spécifique |
| V_f | Fraction volumique de fibre |

LISTE DES ANNEXES

| | | |
|-------------------|---|-----|
| ANNEXE 1 : | Plan factoriel d'expérience pour la construction des fonctions de correction de la constante de raideur et des contraintes maximale de torsion..... | 116 |
| ANNEXE 2 : | Ajout de points de mesures par algorithme d'apprentissage, pour l'estimation de la raideur..... | 118 |
| ANNEXE 3 : | Ajout de 10 points de mesures par algorithme d'apprentissage pour l'estimation de la contrainte maximale de torsion | 119 |
| ANNEXE 4 : | Plan d'expérience initial pour l'estimation du flambage d'Euler | 120 |
| ANNEXE 5 : | Mesures ajoutés par algorithme d'apprentissage à l'estimation du flambage..... | 122 |
| ANNEXE 6 : | Calcul pour la conception des ressorts hélicoïdaux métalliques..... | 123 |
| ANNEXE 7 : | État de l'art sur l'optimisation multicritère..... | 125 |

INTRODUCTION

L'apparition des composites pendant la dernière guerre 39-45, puis leur étude dans les laboratoires de recherche au début des années 60 a abouti aux premières applications industrielles à la fin de cette même décennie avec des pièces structurales en composites pour les avions (F14 en 1969). Aujourd'hui, les composites concurrencent très largement tous les matériaux classiques comme l'aluminium et l'acier. Ils permettent une grande flexibilité d'utilisation, car il est possible de combiner différents types de renforts et de matrices polymères pour obtenir des propriétés mécaniques et physiques adaptées à leurs applications.

Dans le domaine des ressorts hélicoïdaux, la technologie permet de produire en série à grande échelle des ressorts métalliques ou en alliages divers. La mise au point d'un nouveau procédé de fabrication original par Composites Atlantic Ltd (Lünenburg, Nouvelle-Écosse) ouvre la perspective de produire ce type de structure composite, par injection de résine sur des préformes fibreuses. Les avantages structurels des composites sur le plan de leurs excellentes propriétés mécaniques par unité de masse et de leur flexibilité, peuvent alors être optimisés pour les ressorts composites. On peut ainsi concevoir un ressort dont la raideur, la charge de fonctionnement, la tenue en fatigue et l'encombrement répondront au cahier des charges souhaité.

Cette étude a pour premier objectif de prédire les performances de ressorts hélicoïdaux constitués de tubes tressés en verre/époxy et de valider expérimentalement cette approche. En second lieu le projet vise à proposer une méthode de conception pour ce type de ressorts composites. Puisqu'on compte plusieurs variables, incluant notamment les paramètres matériaux, comparé aux méthodes classiques de conception et de calcul des ressorts, cette démarche de conception inverse fait appel aux notions d'optimisation multicritères et aux stratégies évolutionnistes pour permettre une optimisation rapide et simultanée de plusieurs objectifs.

Chapitre 1 : Étude bibliographique et position du problème

1.1 Généralités sur les ressorts hélicoïdaux

1.1.1 Fonction des ressorts

Historiquement, un ressort se définit comme « tout organe élastique pouvant supporter d'importantes déformations et destiné à exercer une force en tendant à reprendre sa forme initiale après avoir été plié, tendu, comprimé ou tordu » d'après la définition du Petit Larousse. Cette aptitude à rester dans le domaine élastique malgré d'importantes déformations, équivalente à la quantité d'énergie élastique que le matériau peut emmagasiner, est évaluée à l'aide du module de résilience (figure 1.1).

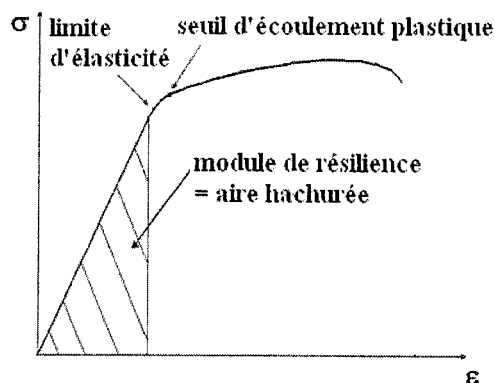


Figure 1.1 : Définition du module de résilience

L'utilisation d'un ressort peut avoir plusieurs fins :

- exercer des forces de rappel pour maintenir des pièces en contact (ressorts de soupape dans les moteurs à piston, ressorts d'embrayage),
- absorber les chocs (ressorts de suspension automobile, ressorts sismiques),
- emmagasiner et restituer de l'énergie (ressorts de montre, disjoncteurs),
- mesurer une force (dynamomètre, balance).

L'invention du ressort hélicoïdal a permis d'emmagasiner une plus grande quantité d'énergie dans un espace plus restreint. Son développement est lié au progrès industriel du XIX^{ème} siècle. Les utilisations se diversifièrent au XX^{ème} siècle pour trouver des

applications dans de très nombreux systèmes mécaniques et dans des domaines variés (automobile, aéronautique...).

Actuellement la limite d'élasticité des matériaux usuels est de l'ordre de 0.15% de déformation. Ainsi il s'avère nécessaire d'avoir recours à des structures spéciales pour absorber de grandes déformations tout en restant dans le domaine élastique. On distingue principalement 3 formes de ressorts, cylindrique, conique et plate. On peut aussi classer les ressorts selon les contraintes subies (traction/compression, flexion ou torsion).

1.1.2 Résultats de la mécanique des ressorts hélicoïdaux cylindriques circulaires

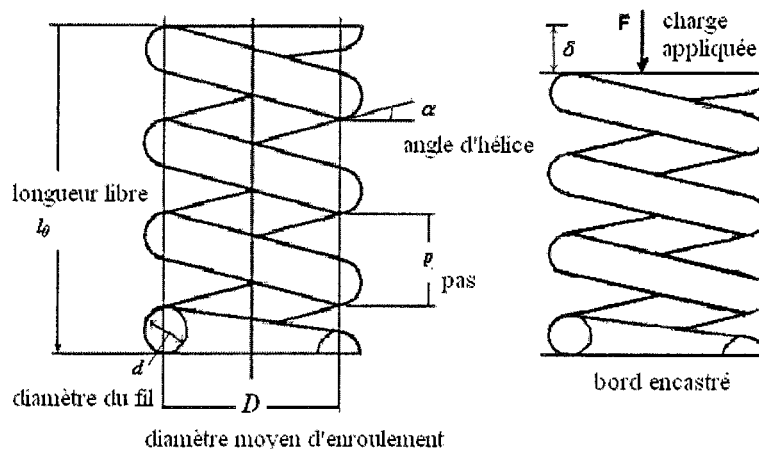


Figure 1.2: Paramètres géométriques dans un ressort hélicoïdal cylindrique

La constante de raideur d'un ressort hélicoïdal est définie comme suit :

$$k = \frac{F}{\delta} \quad (1.1)$$

avec

- k constante de raideur (N/m),
- F force appliquée,
- δ déflexion du ressort au point d'application de la force.

Lorsque l'on comprime le ressort avec une force F , la contrainte engendrée est essentiellement de torsion, ainsi qu'une partie de cisaillement pur. Pour une sollicitation statique, la contrainte induite à la fibre intérieure d'un fil circulaire s'écrit (Wahl 1963):

$$\tau = \tau_{\text{torsion}} + \tau_{\text{cisaillement}} = \frac{FDd}{4J} + \frac{F}{A}$$

avec

- D diamètre moyen du ressort,
- d diamètre du fil,
- J moment d'inertie de torsion $J = \pi d^4 / 32$
- A section droite du ressort $A = \pi d^2 / 4$

En introduisant l'indice du ressort $C = D/d$, on obtient l'expression suivante :

$$\tau = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{0.5}{C}\right) = K_s \frac{8FD}{\pi d^3}$$

où K_s est le facteur de correction, qui tient compte de la torsion et du cisaillement. Mais si l'on veut prendre en compte l'effet de la courbure du fil (effet dynamique), l'expression de la contrainte se modifie légèrement :

$$\tau = K \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (1.2)$$

avec

$$K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C} \quad (1.3)$$

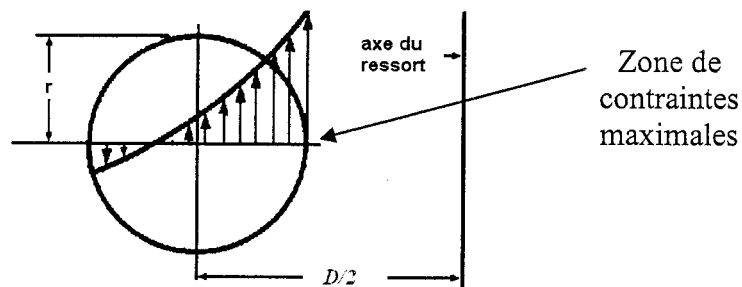


Figure 1.3: Contraintes dans la section du fil du ressort

Le paramètre K est appelé facteur de Wahl ou facteur de correction pour ressort hélicoïdal cylindrique en fatigue. On notera que ce facteur de correction dépend de la géométrie du fil du ressort (ici, fil de section circulaire). L'effort maximal est supporté par les fibres externes situées le plus près du centre de l'hélice. On va à présent calculer le déplacement du ressort au point d'application de la force F au moyen du théorème de Castigliano. Celui-ci postule que dans un système élastique, le déplacement

correspondant à une force est obtenu en prenant la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force, soit :

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial F} \quad (1.4)$$

Avec

$$U = \frac{M_t^2 l_{tot}}{2GJ}$$

$$M_t = \frac{FD}{2}$$

où

- l_{tot} longueur totale du fil du ressort ($l_{tot} = \pi DN / \cos \alpha$),
- N nombre de spires actives du ressort,
- α angle de l'hélice (défini par $\tan \alpha = p / \pi D$, où p est le pas du ressort),
- G module de cisaillement.

Soit l'expression de la constante de raideur suivante :

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{dG}{8C^3 N} \quad (1.5)$$

Voyons comment se modifie cette dernière expression dans le cas d'un ressort hélicoïdal tubulaire, c'est-à-dire de section creuse. Seule l'expression du moment d'inertie de torsion se trouve changé en :

$$J = \frac{\pi(d_{ext}^4 - d_{int}^4)}{32}$$

Avec :

- d_{int} diamètre intérieur du fil du ressort,
- d_{ext} diamètre extérieur du fil du ressort.

Finalement, les contraintes dans le fil du ressort deviennent donc :

$$\tau = K \frac{8FD}{\pi(d_{ext}^3 - d_{int}^3)} \quad (1.6)$$

Et la constante de raideur s'écrit :

$$k = \frac{(d_{ext}^4 - d_{int}^4)G}{8D^3N} \quad (1.7)$$

Dans le cas d'un matériau composite, le module de cisaillement plan G_{xy} se substitue au module de cisaillement G d'un matériau isotrope. On a finalement l'expression analytique suivante pour la constante de raideur d'un ressort hélicoïdal tubulaire de section circulaire en matériau composite :

$$k = \frac{(d_{ext}^4 - d_{int}^4)G_{xy}}{8D^3N} \quad (1.8)$$

1.2 Ressorts en matériaux composites

1.2.1 Ressorts à lame de suspension automobile

L'idée d'utiliser un matériau composite dans un ressort a été d'abord appliquée dans les ressorts à lame de suspension automobile. On vient de voir que la capacité à emmagasiner l'énergie joue un rôle majeur dans la conception d'un ressort. L'expression de l'énergie élastique spécifique (par unité de volume) est la suivante :

$$U = \frac{\sigma_{ultime}^2}{\rho E} \quad (1.9)$$

où

- σ_{ultime} contrainte maximale au sein du matériau,
- ρ densité du matériau,
- E module de Young du matériau constitutif du ressort.

Ainsi on observera facilement qu'un matériau de faible densité et de faible rigidité (petit module de Young) aura ainsi une plus grande aptitude à stocker de l'énergie élastique pour une même résistance σ_{ultime} . C'est pourquoi les matériaux composites sont de très bons candidats pour de telles applications, puisqu'il est possible de placer les renforts de telle sorte à augmenter σ_{ultime} . Dans les dernières années, l'accent a été mis par l'industrie automobile sur les ressorts de suspension à lame faits en matériau composite. Pour des raisons de faisabilité économique, les ressorts en fibre de verre à matrice époxyde ont été étudiés, notamment par Al-Qureshi (2001) dans le cas d'un véhicule de poids relativement modéré.

Une des difficultés au niveau de la conception des ressorts composites vient de la nature anisotrope et inhomogène du matériau utilisé, par comparaison avec un métal ou un alliage. Avec une forme parabolique en épaisseur, on arrive à une solution efficace avec un ressort un peu moins résistant en flexion, mais bien meilleur en cisaillement qu'un ressort à lame classique en acier. Tout cela s'accompagne d'un gain de poids substantiel, d'autant plus que le ressort à lame en composite est monocouche, et même si la section, variable, est plus large que pour un ressort à lame en acier. Ce dernier possède généralement une structure multicouche (figure 1.4). Ainsi pour un problème analogue de ressort à lame pour suspension automobile, (Rajendran and Vijayarangan 2001) ont obtenu une réduction du poids total de 76 % par rapport au ressort métallique initial.

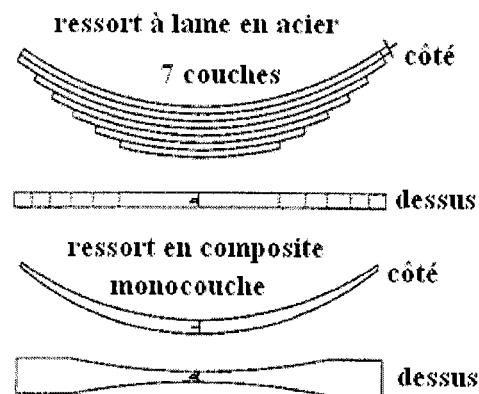


Figure 1.4: Ressorts à lame en acier et en matériau composite

L'optimisation de la forme du ressort est cruciale, ce dernier représentant 15 à 20% du poids total non suspendu du véhicule. Ce poids accélère la fatigue dans le système de suspension et demeure une source d'inconfort pour le passager. Ainsi la réduction du poids des ressorts à lame, quelque soit le matériau utilisé, reste un défi technologique permanent. Dans ce cas, les paramètres à optimiser sont la largeur et l'épaisseur. Les algorithmes génétiques ont permis de mettre en œuvre une technique d'optimisation multicritères rapide et efficace dans cette étude (Rajendran et Vijayarangan, 2001).

1.2.2 Ressorts circulaires et elliptiques

On vient de voir l'intérêt de remplacer l'acier par un matériau composite composés d'unidirectionnels dans le cas des ressorts à lame. Cependant, si ces plastiques renforcés possèdent une plus grande capacité spécifique de stockage d'énergie élastique que l'acier, ils présentent, en revanche, une plus faible résistance aux contraintes de cisaillement. Leur application directe dans des ressorts hélicoïdaux obligerait donc à augmenter le diamètre du ressort, ce qui irait à l'encontre du gain de poids ou de l'encombrement. Une solution alternative a été étudiée par Mallick (1992) pour des ressorts elliptiques. Le test en compression montrait une rupture causée par cisaillement interlaminaire (Mallick 1987).

Pour utiliser au mieux les propriétés en tension des fibres au sein d'un ressort hélicoïdal ou cylindrique, le National Engineering Laboratory a eu l'idée d'employer des tresses en fibres de carbone plutôt que des unidirectionnels (Longman 1990). Plus récemment, le champ d'investigation s'est élargi aux ressorts cylindriques, et la théorie de l'élasticité, a permis d'évaluer la constante de raideur de ces ressorts (Tse, Reid, et al. 2001). Enfin, on explore les possibilités des plastiques renforcés de tissus de fibres pour des ressorts circulaires, dont les bords plats sont en contact, sous chargement linéique et surfacique (Tse, Lau, Wong, et Reid 2002). Une analyse par éléments finis a permis de mettre en évidence les effets du cisaillement transverse. Il apparaît que le demi angle intérieur α du bord plat est un paramètre crucial de la rigidité du ressort (figure 1.5).

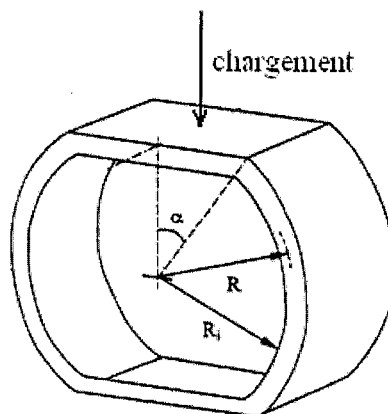


Figure 1.5: Ressort circulaire à bord plat, de demi angle α

1.2.3 Ressorts hélicoïdaux

1.2.3.1 Perspectives et études antérieures

Un ressort hélicoïdal cylindrique est généralement fabriqué à partir d'un fil métallique circulaire plein. Néanmoins l'utilisation d'un matériau composite ouvre des perspectives intéressantes, comme un gain de poids conséquent. Cela est d'autant plus vrai qu'en employant des tresses tubulaires le fil du ressort est creux, et qu'une telle structure est particulièrement performante pour les efforts de torsion prédominants dans un ressort hélicoïdal. En outre, ce type de matériau présente un bon comportement en fatigue, en plus de bien résister à la corrosion. Enfin ces matériaux offrent un meilleur comportement dynamique que la plupart des ressorts métalliques traditionnels. En plus de ces avantages structuraux, on peut tirer parti de la nature composite du matériau, en optimisant l'orientation des fibres, le choix des matériaux constitutifs, le nombre de couches et l'épaisseur de la section du fil selon l'application visée.

Afin de relier les performances mécaniques du ressort composite ainsi formé à ses paramètres géométriques (nombre de spires N , nombre et épaisseur des plis, angle des fibres $\pm\theta$, diamètre du ressort) et structuraux (type de fibres et de résine, fraction volumique), une étude analytique a été menée par Byung-Sun, Joon-Hyung, et Byung-Ha (1999). Ce modèle, fondé sur les lois de la micromécanique de la théorie des laminés, obtient une bonne corrélation avec les mesures expérimentales. Il prend en compte la géométrie d'une cellule unitaire de tresse, la courbure des fibres due au tressage et les matrices de rigidité des matériaux utilisés. On obtient l'expression suivante pour la constante de raideur:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{G_{eq} d^4}{8D^3 N \cos \alpha} \quad (1.6)$$

où

$$G_{eq} \text{ est le module de cisaillement du matériau, } G_{eq} = 2 \frac{G_{12} G_{13}}{G_{12} + G_{13}}.$$

Le procédé de fabrication retenu par Byung-Sun est le moulage par transfert de résine (*Resin Transfert Molding*, RTM) qui consiste à imprégner une préforme fibreuse

avec une résine injectée. L'opération de cuisson aura lieu dans un moule, dont on contrôlera le cycle de température et la pression d'injection de la résine.

On recense également à ce jour des études sur des structures tubulaires hélicoïdales en matériau composite, pour obtenir une isolation sismique efficace (Ponslet et Miller 1998), ainsi que dans le domaine de l'isolation électrique (Van Tooren et Antoniazzi 2000). Un autre type de fabrication a vu le jour, mais reste limité à des ressorts de faible épaisseur. Il s'agit d'une imprégnation manuelle de la résine sur la préforme tubulaire fibreuse, dans laquelle on a préalablement inséré une membrane en silicone remplie de sable pour garder intacte la structure lors de l'imprégnation et de l'enroulement hélicoïdal (Gobbi et Mastinu 2001b).

Jusqu'à présent les difficultés liées au procédé de fabrication ont limité les investigations sur ce type de structures. Les préformes étaient le plus souvent obtenues par enroulement filamentaire, ce qui limitait les possibilités d'optimisation. Néanmoins avec l'apparition de préformes fibreuses produites par procédé textile on peut aujourd'hui élargir la gamme de matériaux et donc de performances. On note d'autre part que l'injection sur cette structure complexe nécessite une grande habileté, un moule performant et les cadences de production sont beaucoup plus faibles que pour les ressorts classiques. Cependant le développement de nouveaux procédés d'injection sous membrane à pression contrôlée ouvre de nouvelles perspectives tant du point de vue de la qualité que de la reproductibilité des pièces.

1.2.3.2 Vibrations libres

En tant qu'éléments d'un système mécanique (automobile par exemple), les ressorts hélicoïdaux sont utilisés pour fournir certaines réponses désirées (au niveau du déplacement, du temps de réaction, etc.). Il faut donc s'intéresser à leur comportement en vibration, car les effets de résonance interne créent des raideurs dynamiques significatives dont il faudra tenir compte lors de la conception. La matrice de rigidité dynamique, issue de la théorie des structures élancées de Timoshenko (1936), permet de mettre à jour les fréquences naturelles d'oscillations, qui concordent avec les résultats expérimentaux et les études par éléments finis. On montre ainsi que la raideur d'un

ressort hélicoïdal en matériau isotrope est beaucoup plus élevée à haute fréquence que pour une sollicitation quasi statique (Lee et Thompson 2001).

En ce qui concerne les matériaux composites, la théorie des structures élancées permet de tirer les équations régissant le comportement d'un matériau linéaire, homogène et orthotrope (Yildirim et Sancaktar 2000). Les fréquences naturelles d'oscillation sont calculées par la méthode de la matrice de transfert (Pearson 1980). Outre l'importance des conditions de liaison du ressort (encastrement, liaison glissière, pivot, etc.), on retiendra l'influence des paramètres intrinsèques du ressort sur les six fréquences vibratoires fondamentales: le nombre de spires actives, le module de cisaillement G_{xy} , l'indice du ressort C et le rapport des modules de Young dans les deux directions principales E_x/E_y .

1.3 Optimisation multicritères

1.3.1 Objectif recherché et concepts fondamentaux

La démarche de conception d'un ressort hélicoïdal s'appréhende de la manière suivante : partant d'un cahier des charges précisant la raideur, la déflexion maximale, l'encombrement maximal ainsi que la charge appliquée au ressort, on veut prévoir les paramètres géométriques et matériaux du ressort pour optimiser la performance, par exemple à la fois la masse et la durée de vie. A cela s'ajoutent des contraintes de stabilité locales et globales, ainsi que des conditions de fonctionnement (température, nombre de cycles, fréquence d'utilisation).

Le concepteur doit être en mesure de préciser le diamètre d'enroulement D , le diamètre intérieur du fil du ressort d_{int} , le nombre de spires actives N , le nombre de plis n du laminé constituant le tube creux, leur épaisseur e et l'orientation des fibres tressées $\pm\theta$ afin de parvenir au meilleur compromis possible entre les différents critères de performances du ressort. Une méthode par essai et erreur s'avère peu efficace et très coûteuse, sachant que la fabrication nominale d'un ressort composite est très onéreuse et que les possibilités de variation des paramètres sont grandes. On met donc en œuvre une méthode d'optimisation multicritères « *Multi-Objective Programming* » (MOP,

Statnikov et Matusov 1995), qui malgré le nombre élevé de degrés de liberté du problème est capable d'harmoniser les critères conflictuels entre eux pour obtenir une solution optimale.

Détaillons-en le principe : la théorie MOP donne un moyen rigoureux de choisir les paramètres quand des contraintes contradictoires sur les performances du système doivent être satisfaites. Alors qu'habituellement la tâche du concepteur revient à trouver **une solution optimale** en changeant un certain nombre de paramètres, en optimisant plusieurs objectifs à la fois (analyse dite multicritères) on aboutit à **un ensemble de solutions**. Chacune d'entre elles est équivalente vis-à-vis du problème, car **l'amélioration de l'un des objectifs entraîne la dégradation d'au moins un autre**. Cet ensemble optimal, appelé **ensemble de Pareto**, est donc généré en se plaçant dans l'espace des fonctions-objectifs, ce qui permet une comparaison directe des performances des différentes solutions. Au niveau mathématique, le problème d'optimisation multicritères se formule ainsi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) \text{ sous les conditions suivantes :} \\ g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m_e \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m \\ x \in X \end{array} \right.$$

avec

- $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ vecteur des **k** fonctions-objectifs,
- $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ vecteur des **n** paramètres,
- $g_i(x)$ inégalité des **m** fonctions-contraintes,
- X gamme de valeurs des paramètres.

Une solution x_o de l'ensemble trouvé sera optimale au sens de Pareto si elle est « non dominée », c'est-à-dire qu'aucune autre possibilité ne peut améliorer ou égaler à la fois toutes ses fonctions-objectifs f_i . On choisira alors la solution du problème parmi cet ensemble de solutions «non dominées», dont on peut voir une illustration à la figure 1.6.

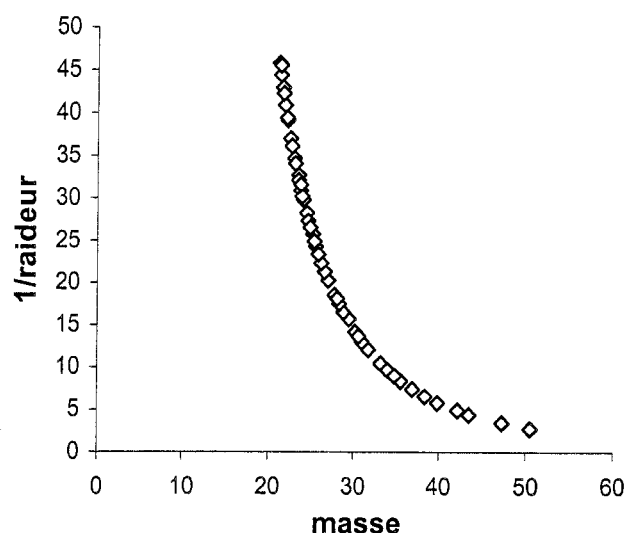


Figure 1.6: Ensemble de Pareto d'une optimisation multicritères (minimiser la masse et l'inverse de la raideur), représenté dans l'espace des fonctions-objectifs

1.3.2 Application de l'optimisation multicritères à la conception de ressorts hélicoïdaux

Des exemples d'application de cette méthode multicritères ont eu lieu dans le domaine de la conception automobile par Gobbi et Mastinu (2001a) pour optimiser le comportement dynamique des véhicules routiers à suspensions passives. Ces derniers se sont par la suite intéressés au ressort hélicoïdal creux composite. À partir de la théorie des laminés, reliant les déformations du ressorts aux contraintes locales et globales subies (charges longitudinale et transversale, moment de torsion, moment de flexion), ils ont étudié le comportement du ressort soumis à une compression axiale, pour différents indices de performances : la constante de raideur, la stabilité globale (flambage d'Euler) et locale, les fréquences propres, la tenue du matériau. Cette étude porte toutefois sur un stratifié dont chaque couche de la séquence d'empilement a le même angle de tressage de fibres, ce qui simplifie les expressions de la matrice de rigidité et de souplesse. D'autre part comme le procédé de fabrication utilisé ne permettait d'obtenir que des matériaux tubulaires de faibles épaisseurs, la gamme de ressorts considérés dans cette étude ne constitue qu'un cas particulier des ressorts composites hélicoïdaux.

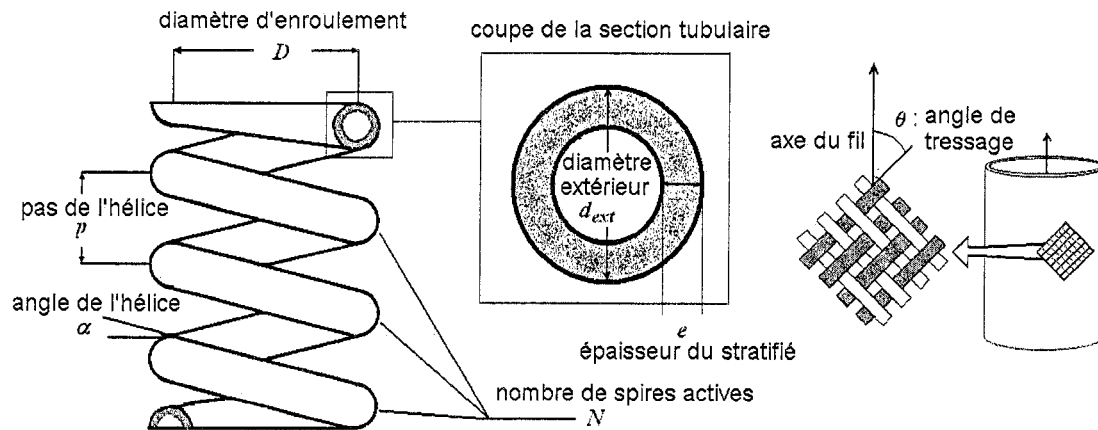


Figure 1.7: Paramètres du ressort hélicoïdal tubulaire composite à plis tressés

L'étude se place sur un plan fondamental pour comparer les performances de différents matériaux. On cherche à minimiser la masse tout en maximisant la raideur du ressort. Les paramètres géométriques sont les suivants : la longueur libre du ressort l_0 , le diamètre d'enroulement D , l'angle de l'hélice α , le diamètre tubulaire d (ou diamètre intérieur du fil), l'épaisseur du fil e , le nombre de plis n et l'angle de tressage des fibres θ . Le dernier paramètre est le matériau utilisé : acier, carbone/époxy ou verre/époxy, qui sont eux-mêmes caractérisés par leurs propriétés mécaniques intrinsèques. Les contraintes à respecter dans la conception sont les suivantes : les conditions de stabilité globale et locale pour éviter le phénomène de flambage, la valeur limite des fréquences de résonance, enfin le critère de rupture du matériau (ici le critère quadratique de Tsai-Hill est utilisé). Par ailleurs on impose une déflexion du ressort d'au moins 200 mm et une longueur libre inférieure à 300 mm. On peut alors noter le gain apporté par les ressorts tubulaires en verre/époxy et carbone/époxy par rapport aux ressorts en acier à tube plein (figure 1.8).

On peut également constater que les ressorts à structure tubulaire, c'est-à-dire à fil creux, sont plus performants que les ressorts à fil pleins. A constante de raideur égale, le gain de poids est significatif, quel que soit le matériau utilisé.

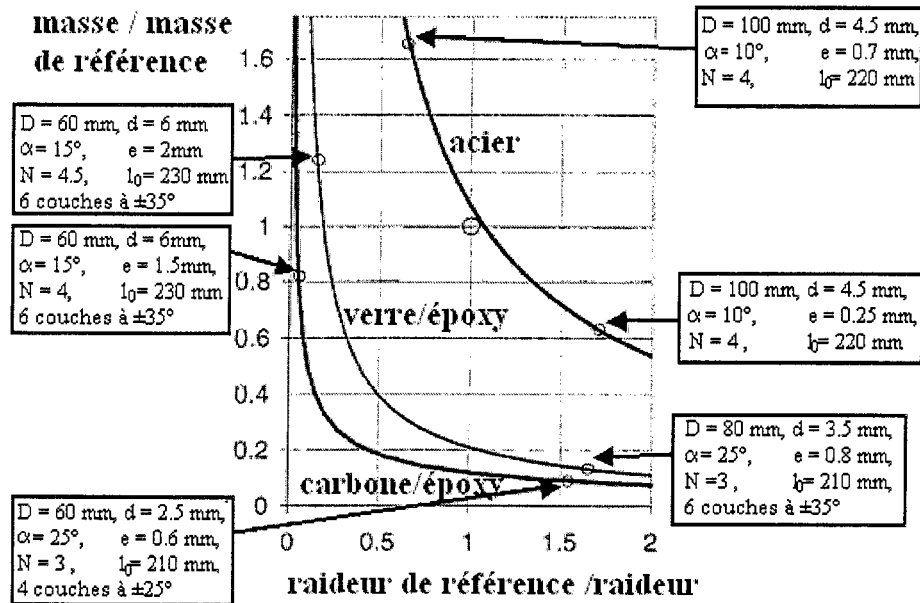


Figure 1.8: Comparaison de la masse en fonction de la raideur du ressort, par rapport à un ressort de base en acier de masse m_0 et de raideur k_0 , pour 3 matériaux, d'après Gobbi et Mastinu (2001a)

Les ressorts composites optimisés comptent généralement de 4 à 6 couches de tresses. L'angle optimal de tressage des fibres reste autour de $\pm 30^\circ$. Il est naturel de trouver un angle inférieur à $\pm 45^\circ$, qui correspond à une valeur optimale en torsion à cause de la contrainte de stabilité globale pour éviter le flambage. L'angle d'hélice α optimal d'un ressort composite est de l'ordre de 15° , plus grand que pour l'acier car le matériau composite est moins rigide (son module de cisaillement G_{xy} est plus faible).

Mais cette étude ne traite qu'une gamme limitée de matériaux composite. Par exemple on peut imaginer faire varier les angles de tressage d'une couche à l'autre du stratifié. Cela permettra de rajouter des degrés de liberté dans la recherche du ressort optimal. On peut également envisager des structures plus épaisses, supérieures à 2 mm , même si dans ce cas le modèle construit par Gobbi et Mastinu (2001b) ne s'appliquera plus. Il faudra alors avoir recours à une étude par éléments finis. Les auteurs soulignent enfin le fait que l'adoption de ces structures tubulaires en composites dépend du progrès des technologies de fabrication, qui devront assurer la qualité et la reproductibilité des pièces tout en abaissant les coûts de production.

Chapitre 2 : Approximation par éléments finis du comportement mécanique du ressort

Dans ce chapitre la modélisation la plus précise du comportement mécanique d'un ressort composite est effectuée par la méthode des éléments finis. Cette approche est validée pour un ressort hélicoïdal tubulaire en confrontant les résultats avec les formules théoriques classiques dans le cas de la compression axiale.

2.1 Intérêts et difficultés de l'analyse par éléments finis

Longtemps réservé aux grandes sociétés et laboratoires de recherche, le calcul par éléments finis est devenu depuis quelques années un outil populaire pour les concepteurs en bureau d'études industriel. Il mêle étroitement la mécanique, les mathématiques et l'analyse numérique (Fortin et Garon 1997), mais reste d'usage complexe tant sur le plan de la modélisation du problème physique que pour l'aspect numérique, ainsi que dans l'interprétation et la validation des résultats obtenus.

La finalité d'un ressort hélicoïdal du point de vue de l'ingénieur est de présenter une courbe de flexibilité linéaire, voire linéaire par morceaux (ressorts à flexibilité variable) dans une plage de chargements donnée. En revanche, son comportement mécanique non linéaire, relié à de grands déplacements et à des répartitions de contraintes complexes, justifie l'utilisation du calcul par éléments finis pour se rapprocher au plus près de la réalité. Enfin, le développement de codes de calcul pour les matériaux anisotropes tels que les plis tressés d'un composite permet de prendre en considération toute la complexité du phénomène en un temps de calcul raisonnable.

C'est pourquoi le volet modélisation de ce projet est développé à partir du logiciel de calcul par éléments finis SYSPLY, développé par E.S.I. Group. Notre choix s'est arrêté sur ce dernier car il possède un module d'analyse spécifique pour les composites, ainsi que des options de calculs dynamiques, vibratoires et d'amortissement avancées et particulièrement prometteuses (Guide de l'utilisateur SYSPLY 2003).

2.2 Modélisation des déplacements

2.2.1 Modèle de calcul en option coque

2.2.1.1 Intérêt de l'option coque

Dans un premier temps on modélise le ressort en option coque, c'est-à-dire que le matériau est défini et affecté à la structure selon un plan moyen. On peut lui donner une épaisseur non négligeable, puisque ce mode de calcul est généralement adapté à l'étude du comportement statique ou dynamique de coques minces ou épaisses dans l'espace. Les mailles sont surfaciques, même si elles permettent un calcul tridimensionnel. Ce mode de calcul, à mi-chemin entre un calcul bidimensionnel et tridimensionnel, est prisé dans le domaine des coques spatiales composites, car il est beaucoup moins coûteux en temps de calcul moyennant certaines approximations (figure 2.1).

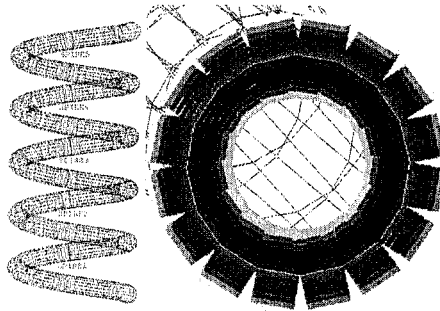


Figure 2.1 : Maillage du ressort et affectation du matériau en option coque

Ce mode de calcul néglige les contraintes et déformations dans le sens de l'épaisseur du matériau (repère z local). En revanche il est adapté au calcul du cisaillement plan σ_{xy} , qui constitue l'effort prédominant pour un ressort hélicoïdal. Ainsi, pour le calcul par éléments finis, on considère dans un repère local que :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

Ceci réduit la taille du système à résoudre de moitié et permet donc un gain de temps de calcul. Afin de vérifier la validité de ces approximations, il faut modéliser un ressort en compression axiale, et comparer les résultats en contraintes et déplacements avec la théorie des ressorts.

2.2.1.2 Modélisation de la compression axiale

Il est primordial d'appliquer des conditions aux frontières adéquates pour obtenir des résultats proches de la réalité. Tout d'abord on encastre la section inférieure du ressort (tous les degrés de liberté sont bloqués). En ce qui concerne la section supérieure du ressort, on laisse un seul degré de liberté U_z libre, afin de permettre un déplacement le long de l'axe du ressort lors de la compression (liaison glissière). Enfin on applique le chargement aux nœuds de la section supérieure, suivant $-U_z$ (figure 2.2).

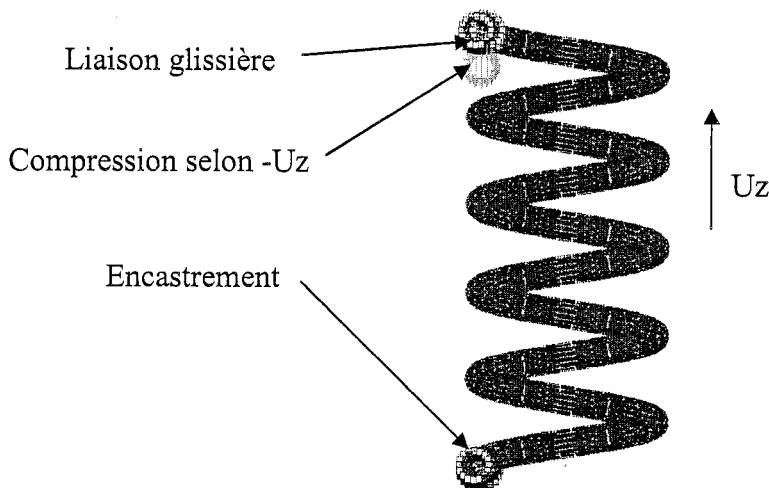


Figure 2.2 : Modélisation de la compression axiale

Ce type de modélisation a déjà été essayé avec succès pour simuler la compression de ressorts hélicoïdaux cylindriques, tubulaires ou non, en matériau isotrope (acier) avec d'autres logiciels d'éléments finis comme CATIA et IDEAS (Charlebois 2001, et Mouren 2001). On se concentre ici sur les ressorts à fil creux (tubulaires). Dans un premier temps, on utilisera un matériau isotrope (acier), puis un matériau orthotrope pour représenter les plis tressés en verre/époxy.

2.2.1.3 Simulations pour un matériau isotrope

On prend pour ces simulations préalables l'acier, matériau usuel des ressorts hélicoïdaux, dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

- $E = 200 \text{ GPa}$,
- $\nu = 0.266$,

- $G = 78.99 \text{ GPa}$.

où E est le module de Young, ν le coefficient de Poisson et G le module de cisaillement. On doit vérifier que le ressort hélicoïdal cylindrique que l'on souhaite modéliser présente un comportement linéaire, c'est-à-dire que toutes les spires se déplacent proportionnellement lorsqu'on applique une force axiale. Un essai est donc mené sur un ressort possédant les caractéristiques géométriques suivantes :

- $D = 98 \text{ mm}$,
- $p = 50 \text{ mm}$,
- $d_{int} = 17 \text{ mm}$,
- $N = 5$ spires actives,
- $e = 5 \text{ mm}$.

On applique un chargement de 1 N à chaque noeud de la section supérieure, soit au total 16 N appliqué à la structure. On vérifie en premier lieu la linéarité du déplacement des spires les unes par rapport aux autres (figure 2.3).

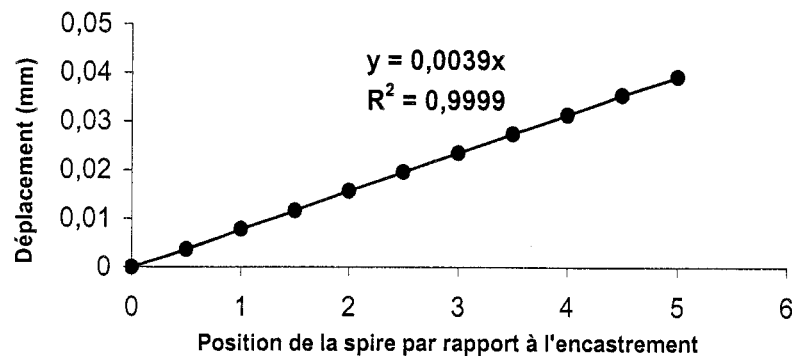


Figure 2.3: Vérification de la linéarité de la réponse du ressort

On a bien obtenu la linéarité recherchée, comme le montre le coefficient de corrélation entre la courbe et l'interpolation linéaire ($R^2 = 0.9999$). Le modèle est donc satisfaisant du point de vue de la linéarité. On souhaite alors vérifier l'influence de différents paramètres sur la constante de raideur du ressort, tels qu'ils apparaissent dans la formule analytique.

Tout d'abord pour vérifier l'influence du nombre de spires sur la constante de raideur, on utilise le même ressort que précédemment. On fait varier le nombre de spires de 1 à 10 et on note la déflexion sous un chargement de 16 N. Dans le tableau 2.1, k_{EF} représente la constante de raideur calculée par éléments finis, et $k_{théo}$ la constante de raideur théorique. On observe un écart par rapport à la théorie, indiqué par le pourcentage d'erreur de 7 à 9%, selon le nombre de spire du ressort.

| Nombre de spires actives N | Charge F (N) | Déflexion δ (mm) | Raideur calculée k_{EF} (N/mm) | Raideur théorique $k_{théo}$ (N/mm) | % écart entre modélisation |
|------------------------------|----------------|-------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| 1 | 16 | 0,00772 | 2072,54 | 2239,97 | -7,47 |
| 2 | 16 | 0,01547 | 1034,26 | 1119,99 | -7,65 |
| 3 | 16 | 0,02337 | 684,64 | 746,66 | -8,31 |
| 4 | 16 | 0,03131 | 511,02 | 559,99 | -8,75 |
| 5 | 16 | 0,03924 | 407,75 | 447,99 | -8,98 |
| 6 | 16 | 0,04718 | 339,13 | 373,33 | -9,16 |
| 7 | 16 | 0,05511 | 290,33 | 320,00 | -9,27 |
| 8 | 16 | 0,06302 | 253,89 | 280,00 | -9,32 |
| 9 | 16 | 0,07093 | 225,57 | 248,89 | -9,37 |
| 10 | 16 | 0,07883 | 202,97 | 224,00 | -9,39 |

Tableau 2.1 : Écart entre la constante de raideur analytique et calculée par éléments finis en fonction du nombre de spire N

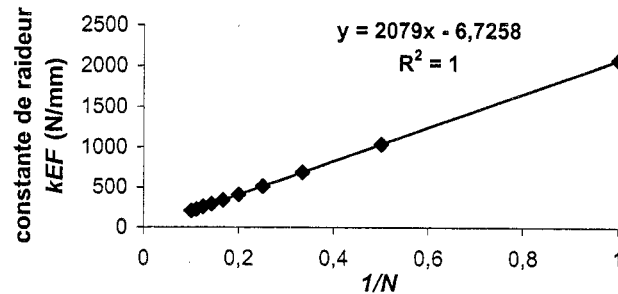


Figure 2.4 : Dépendance de la constante de raideur k_{EF} en fonction de l'inverse du nombre de spire $1/N$

Selon la formule analytique, la constante de raideur dépend de N selon la formule :

$$k_{théo} = \frac{2240}{N}$$

Or les résultats des calculs, s'ils montrent bien une dépendance parfaite en $1/N$, donne un coefficient de proportionnalité différent (figure 2.4):

$$k_{EF} = \frac{2079}{N}$$

On étudie par la suite l'influence du diamètre d'enroulement D sur la raideur du ressort. Le nombre de spires est fixé à 5 et les autres variables restent inchangées. Là encore l'écart, même s'il tend à diminuer avec des diamètres d'enroulement plus grand, reste conséquent, aux alentours de 10% (tableau 2.2).

| Diamètre d'enroulement D (mm) | Charge F (N) | Déflexion δ (mm) | Raideur calculée k_{EF} (N/mm) | Raideur théorique k_{theo} (N/mm) | % écart entre modélisation |
|---------------------------------|----------------|-------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| 60 | 16 | 0,00929 | 1722,28 | 1952,08 | -11,77 |
| 98 | 16 | 0,03924 | 407,75 | 447,99 | -8,98 |
| 120 | 16 | 0,07169 | 223,18 | 244,01 | -8,54 |
| 150 | 16 | 0,13959 | 114,62 | 124,93 | -8,25 |
| 180 | 16 | 0,24093 | 66,41 | 72,30 | -8,15 |

Tableau 2.2 : Écart entre la raideur analytique et calculée par éléments finis en fonction du diamètre d'enroulement D

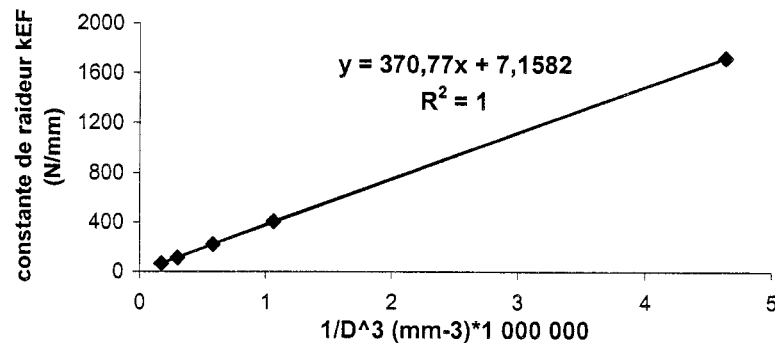


Figure 2.5 : Influence du diamètre d'enroulement sur la raideur k_{EF} du ressort

La dépendance de la raideur calculée en fonction de D devrait être théoriquement de :

$$k_{theo} = \frac{4,21.10^9}{D^3}$$

On constate bien la dépendance voulue, mais là encore le coefficient directeur diffère de façon assez conséquente (figure 2.5):

$$k_{EF} = \frac{3,77.10^9}{D^3}$$

On pourrait montrer le même genre d'écart conséquent pour les autres paramètres géométriques (diamètre du fil, épaisseur du matériau, etc.). Il convient alors de

s'interroger sur cet écart observé entre la modélisation et la théorie. On sait que cette formule théorique est obtenue en ne considérant que les efforts de torsion et en négligeant tous les autres. Cela revient à assimiler un ressort hélicoïdal à une barre de torsion (voir section 1.1.2). Si la formule théorique est exacte pour des ressorts d'indice élevé ($C > 5$), elle reste une bonne approximation dans le reste des cas (Wahl 1963). Donc la différence ne peut provenir simplement de ces approximations, d'autant plus que l'écart demeure important (plus de 8%) même pour des ressorts d'indice supérieur à 5. Il faut donc remettre en cause ici les approximations effectuées pour le calcul en option coque. On est en fait dans un cas où l'épaisseur du matériau ($e = 5 \text{ mm}$) n'est pas négligeable par rapport au diamètre intérieur ($d_{int} = 17 \text{ mm}$).

2.2.1.4 Mise en défaut des approximations de l'option coque

On essaie de montrer dans cette partie que le calcul en option coque n'est valable que pour des structures minces, c'est-à-dire pour lesquelles on a :

$$\frac{d_{int}}{e} \gg 1$$

A cet effet on mène plusieurs simulations en faisant varier ce paramètre. Afin de s'affranchir d'autres influences, on fait aussi varier D et on prend plusieurs matériaux :

- a) l'acier, de module de cisaillement $G = 78.9 \text{ GPa}$,
- b) des stratifiés de composite verre/époxy, dont l'angle de tressage varie suivant les plis ce qui donne des modules G_{xy} différents pour le stratifié (pour 3 plis $G_{xy} = 8.7 \text{ GPa}$, pour 5 plis $G_{xy} = 9.5 \text{ GPa}$, pour 7 plis $G_{xy} = 10.1 \text{ GPa}$ et pour 9 plis $G_{xy} = 10.8 \text{ GPa}$).

Les résultats sont consignés dans la figure 2.6, où le pourcentage d'erreur relative entre la raideur théorique et calculée par éléments finis est représenté en ordonnée. On se garde de faire une distinction entre les différents matériaux, pour montrer que l'erreur subsiste indépendamment de leur nature.

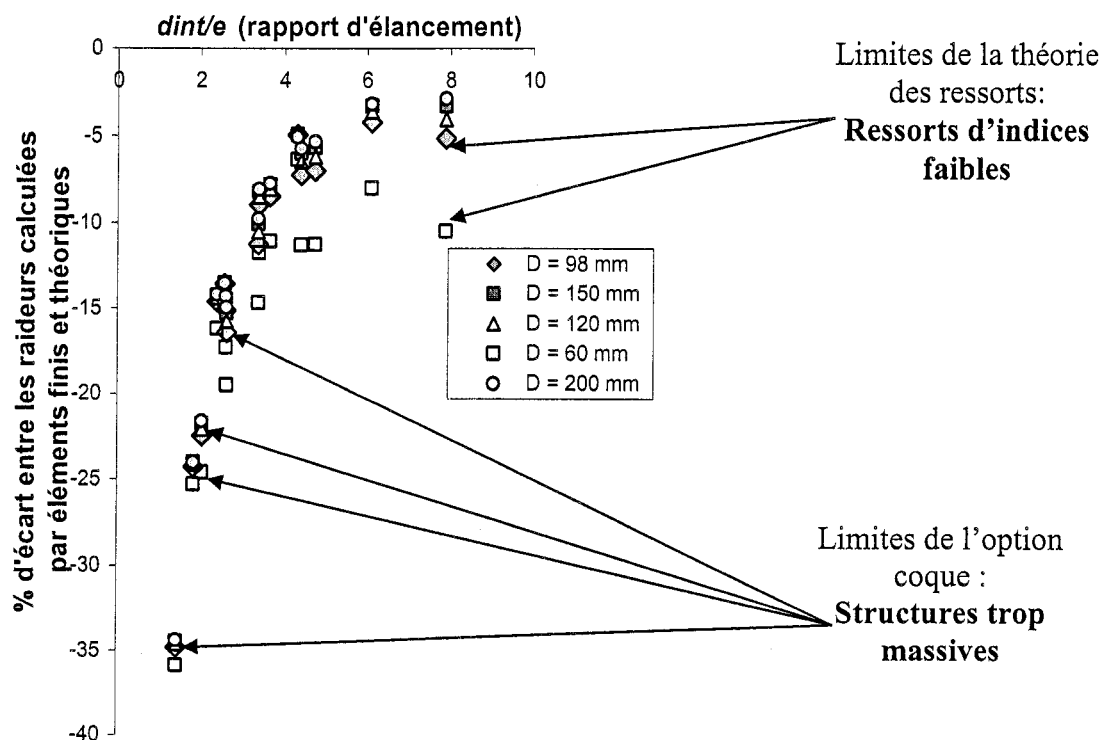


Figure 2.6 : Influence du rapport d_{int}/e sur l'écart de la raideur à la théorie

L'élancement du fil, traduit ici par le rapport d_{int}/e , est donc une variable déterminante pour la précision de ces simulations, indépendamment du matériau considéré. Le diamètre d'enroulement D du ressort a une influence sur l'écart entre les modélisations, qui s'explique par les hypothèses restrictives de la formule analytique (effort de torsion considéré seulement). Mais cette influence reste faible au regard de celle du rapport d_{int}/e . Il apparaît ainsi clairement que l'analyse par éléments finis en option coque ne permet de modéliser avec précision que les structures minces (« *thin-walled* »), pour lesquelles le rapport d_{int}/e est plus grand que 5. En deçà de ce rapport la modélisation induit une erreur trop importante pour être employée. Or puisque la gamme des ressorts à concevoir déborde largement de ce cadre, il faut envisager une méthode de résolution par éléments finis avec des éléments volumiques afin de prendre en compte les contraintes et déformations dans le sens de l'épaisseur du stratifié.

2.2.2 Modèle de calcul tridimensionnel

2.2.2.1 Option de calcul tridimensionnelle

A présent on veut modéliser le ressort d'une façon plus fidèle. On utilisera donc un maillage différent, obtenu par épaissement (extrusion, voir figure 2.7) de la structure coque, afin de représenter la structure de façon tridimensionnelle. Dans ce mode de calcul il n'y a plus d'approximations concernant les contraintes et déformations dans le sens de l'épaisseur du matériau. Le temps de calcul sera donc considérablement rallongé puisqu'on double le nombre d'inconnus par rapport à un calcul coque. Cette option de calcul tridimensionnelle impose l'introduction de plusieurs nœuds de calcul (20 par maille, cf. figure 2.8) contre 4 seulement pour l'option coque.

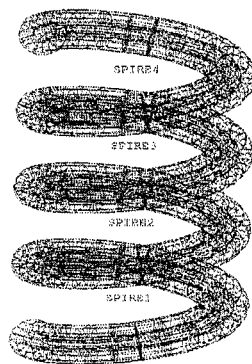


Figure 2.7 : Maillage d'un ressort à 4 spires en éléments volumiques

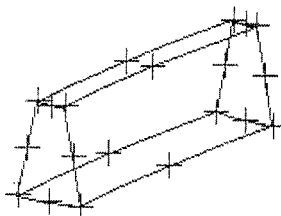


Figure 2.8 : Schéma d'une maille volumique quadratique (20 nœuds de calcul)

En outre il est indispensable de connaître (ou tout au moins d'estimer avec précision) les constantes mécaniques dans le sens de l'épaisseur du matériau (E_z , ν_{xz} , ν_{yz} , résistances selon z ...). Si cela ne pose aucun problème supplémentaire pour un matériau isotrope, il faut néanmoins prendre davantage de précaution pour un matériau orthotrope. La section 2.4 détaille la méthode employée.

2.2.2.2 Validation de l'option de calcul pour les matériaux isotropes

On garde toujours les mêmes conditions aux limites pour modéliser la compression axiale. Les ressorts employés contiennent 4 spires et le pas de l'hélice vaut 50 mm. De même, le diamètre extérieur du fil est fixé à 25 mm. Les différentes constantes de raideur obtenues sont comparées avec la formule analytique. On fait varier l'indice du ressort et l'épaisseur du matériau (acier) pour analyser l'origine de l'écart observé.

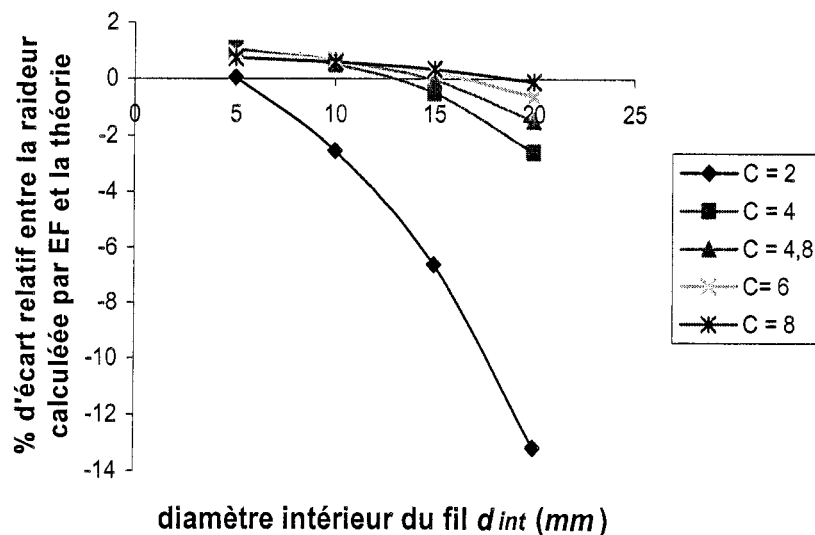


Figure 2.9: Influence du diamètre du fil du ressort et de l'indice sur l'écart entre théorie et calcul par éléments finis pour un matériau isotrope.

A la lecture de la figure 2.9 on met facilement en relation un écart relativement important par rapport à la formule analytique pour un ressort d'indice faible. Cet écart par rapport à la formule analytique sera d'autant plus grand que la structure sera mince (d_{int}/e grand). Cela s'explique simplement par le fait qu'on s'éloigne des hypothèses de torsion pure, desquelles la formule analytique découle. On est alors dans un cas où l'effort de flexion n'est plus négligeable et le ressort hélicoïdal travaille alors de deux façons différentes. Sa raideur, seulement due à la rigidité en torsion, est alors surestimée par la théorie. En revanche, pour des ressorts d'indices usuels ($C > 4$), on se retrouve dans une gamme de réponse prévisible par la théorie à moins de 5% près, ce qui est très satisfaisant. Reste maintenant à valider ces observations pour des matériaux anisotropes tels que ceux utilisés lors de la fabrication du ressort composite.

2.2.2.3 Validation de l'option de calcul pour les matériaux orthotropes

On reprend l'étude précédente mais en substituant l'acier par un matériau orthotrope. On utilise un matériau orthotrope pour modéliser un composite verre/époxy à 60% de fraction volumique de fibres et constitué de plis tressés à $\pm 45^\circ$. Le module de cisaillement dans le plan est pris égal à $G_{xy} = 9.5 \text{ GPa}$ (Charlebois 2003). On fait varier le pas du ressort ($p = 25 \text{ mm}, 35 \text{ mm}, 45 \text{ mm}, 55 \text{ mm}$), ainsi que le diamètre d'enroulement ($D = 50 \text{ mm}, 100 \text{ mm}, 150 \text{ mm}$) et l'épaisseur du matériau ($e = 0,25 \text{ mm}, 1 \text{ mm}, 2 \text{ mm}$). Le diamètre du fil ($d_{ext} = 10 \text{ mm}$) et le nombre de spires ($N = 4$) restent constants. La figure 2.10 dégage les résultats obtenus en mettant en lumière le rôle de l'épaisseur du matériau. On aurait pu également souligner l'influence du rapport d_{ext}/e . Puis on analyse le rôle de l'angle de l'hélice à la figure 2.11.

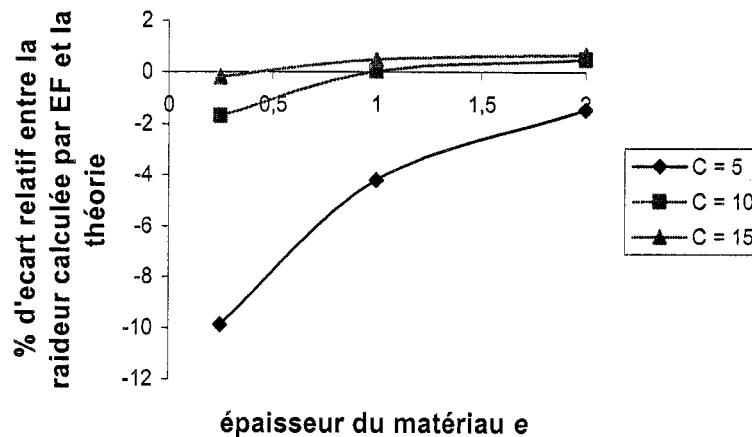


Figure 2.10: Influence de l'indice du ressort et de l'épaisseur du matériau sur l'écart de raideur

Là encore on retrouve la tendance dégagée pour l'acier : l'écart relatif entre l'analyse par éléments finis et la formule théorique se resserre sensiblement pour des ressorts de grands indices C et de rapport de minceur d_{ext}/e faible (c'est-à-dire de tubes épais, où e est important).

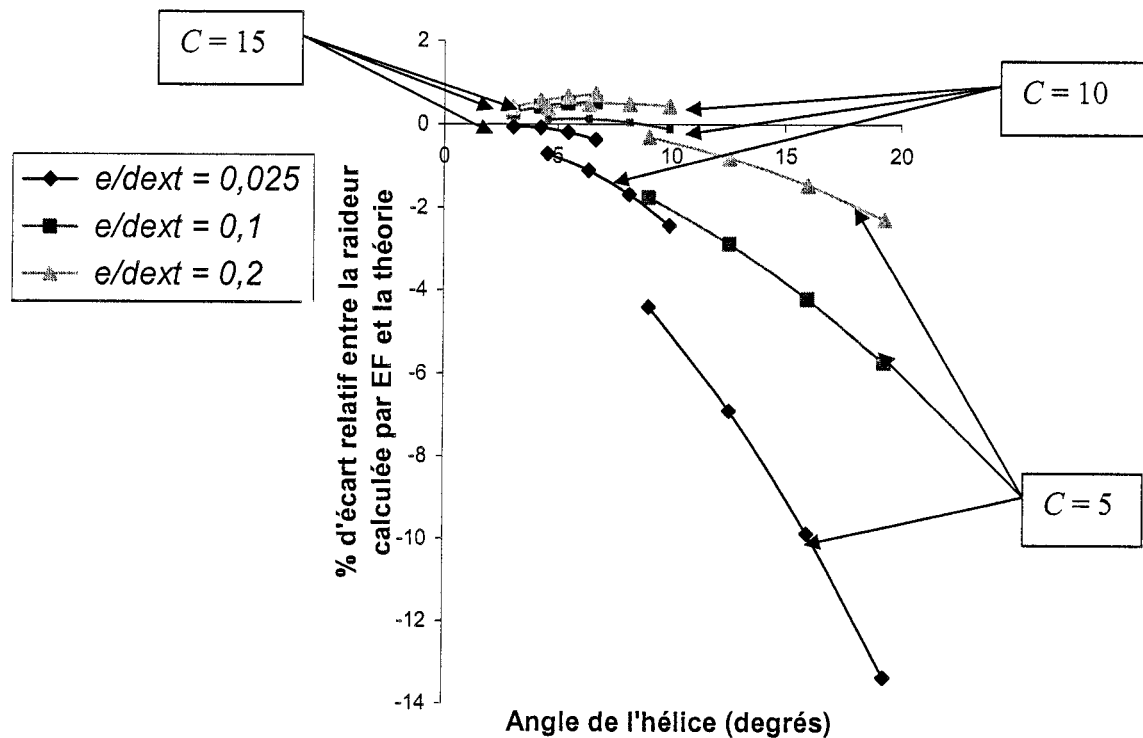


Figure 2.11: Influence de l'angle d'hélice α et de l'épaisseur du matériau e sur l'écart de raideur

Il apparaît donc clairement que les ressorts de grands angles d'hélice ($\alpha > 10^\circ$) ont une constante de raideur qui tend à s'écarter de la formule analytique. Cela n'a rien de surprenant compte tenu des approximations effectuées pour parvenir à cette formule. La même observation peut être formulée pour les ressorts de faibles indices ($C < 6$) et de faible épaisseur ($e < 1 \text{ mm}$). De manière générale, les structures minces ($e = 0,25 \text{ mm}$), non applicable de toute façon pour un composite, ont tendance à accroître considérablement cette erreur par rapport aux structures plus massives ($e > 2 \text{ mm}$). On verra dans le chapitre suivant comment évaluer cette erreur, qui résulte uniquement des hypothèses restrictives de la théorie (où l'effort de flexion n'est pas considéré) et qui a tendance à surestimer la constante de raideur dans le cas de structures minces.

2.3 Modélisation des contraintes

2.3.1 Modélisation avec l'option coque

2.3.1.1 Approximation des plis tressés

Dans le cas de la modélisation coque, on représente chaque pli tressé à $\pm\theta$ du composite verre/époxy comme un empilement de deux renforts unidirectionnels superposés orientés à $+\theta$ et $-\theta$ (figure 2.12). Cette approximation se justifie par le fait que les composites unidirectionnels sont bien mieux connus et plus faciles à étudier que les plis tressés : on disposera ainsi de toutes les données mécaniques sans extrapolation, ce qui réduira l'erreur au préalable.

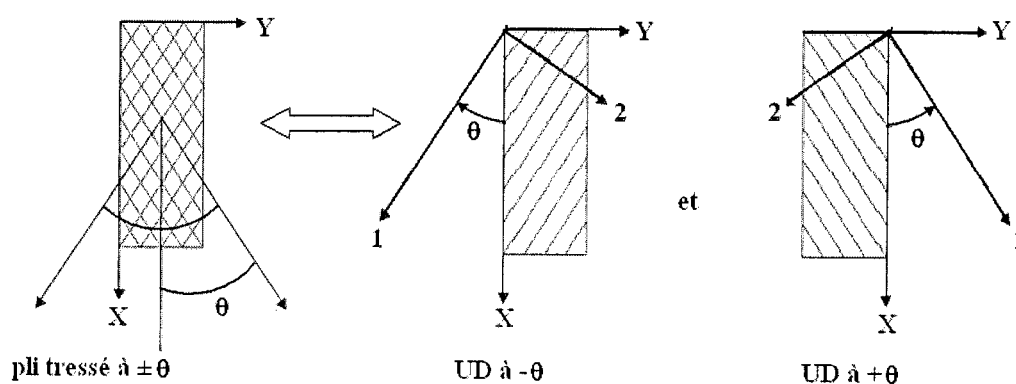


Figure 2.12: Modélisation d'un pli tressé comme superposition de 2 plis unidirectionnels

2.3.1.2 Problèmes fondamentaux dans les résultats obtenus

Cette approximation s'avère pénalisante dans le calcul des contraintes puisque localement le matériau ne se comporte pas comme un unidirectionnel comme la modélisation le considère. On aboutit dès lors à de fortes fluctuations des contraintes d'un pli à l'autre, ce qui n'est pas le cas pour un empilement de plis tressés. On voit un exemple de ces hétérogénéités à la figure 2.13, pour un matériau représentant 7 plis tressés de 1 mm d'épaisseur chacun à $\pm 19^\circ$, $\pm 22^\circ$, $\pm 24^\circ$, $\pm 26^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 33^\circ$ et $\pm 36^\circ$. Ainsi on a modélisé ce stratifié comme un empilement de 14 plis unidirectionnels de 0.5 mm d'épaisseur chacun.

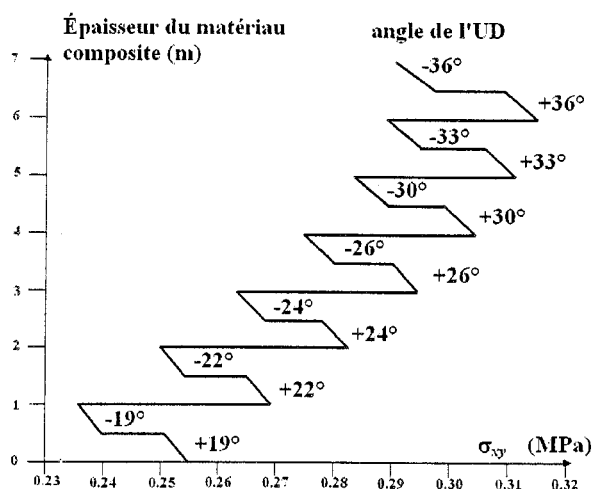


Figure 2.13 : Contraintes de cisaillement σ_{xy} à travers l'épaisseur du matériau pour un stratifié d'unidirectionnels

Il y a une discontinuité pour chaque passage d'un pli unidirectionnel $+\theta$ à un pli $-\theta$, or cela est impossible physiquement puisqu'on se trouve en réalité dans le pli tressé $\pm\theta$. Ainsi ce dernier défaut de la modélisation coque exclue son utilisation pour la modélisation du ressort, car la distribution des contraintes sous un chargement quelconque doit pouvoir être évaluée avec une bonne précision afin de prévoir les zones les plus sollicitées.

2.3.1.3 Discussion

On peut noter que ce problème de modélisation par des unidirectionnels du matériau peut être simplement contourné en modélisant le composite d'une façon plus fidèle, en prenant un matériau orthotrope pour chaque pli tressé par exemple. Mais le manque de données sur chacun des plis tressés oblige à avoir recours à des extrapolations pour déduire chacune des valeurs selon l'angle de tressage. Il est alors nécessaire de prendre les résultats numériques avec plus de prudence et on peut alors sans perdre beaucoup de précision utiliser des modèles tridimensionnels. En effet on ajoute simplement des approximations supplémentaires pour évaluer les constantes mécaniques dans le sens de l'épaisseur du matériau. Puisque ce dernier modèle sera plus fiable et proche de la réalité, comme cela fut démontré dans l'analyse de la raideur du ressort, on l'emploiera également pour le calcul des contraintes également.

2.3.2 Modélisation tridimensionnelle

2.3.2.1 Plis solides

Dans le cadre de l'option de calcul tridimensionnel, le matériau affecté à la structure est nécessairement un empilement de plis de type « solide », c'est-à-dire qu'il faut préciser les constantes mécaniques (modules de Young, coefficients de Poisson, résistances) dans toutes les directions (cf. figure 2.14). Un problème de disponibilité des données expérimentales se pose pour des stratifiés de plis tressés. Cette difficulté sera levée en approchant les valeurs inconnues par la méthode élaborée au chapitre 2.4.

2.3.2.2 Résultats avec un maillage classique du ressort

Comme précédemment, on va chercher à retrouver les résultats de la théorie classique des ressorts en simulant une compression axiale. Tout d'abord on cherche à retrouver les caractéristiques principales de la distribution des contraintes prévues par la théorie, soit que la contrainte de cisaillement σ_{xy} est dominante par rapport aux autres, notamment celle de flexion σ_{xx} et reste relativement constante le long du fil du ressort.

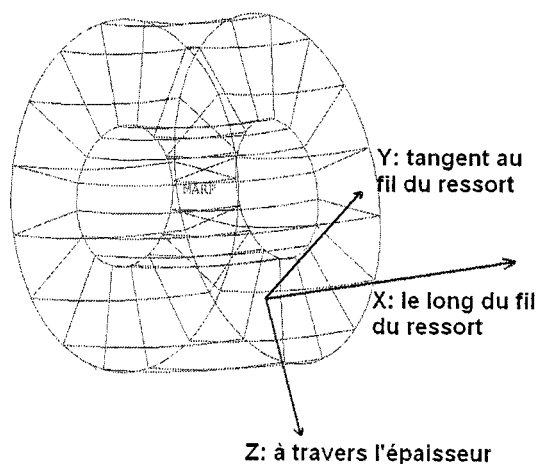


Figure 2.14 : Référentiel local pour chaque élément

En revanche, la distribution de la contrainte de cisaillement σ_{xy} n'est pas homogène pour une section du ressort et l'effort maximal est subi par la partie extérieure de la section orientée vers l'axe d'enroulement du ressort. De manière générale, l'extérieur de la section est plus sollicité que l'intérieur.

Pour un ressort à 6 spires, dont les paramètres sont détaillés ci-dessous, on trace une carte de la contrainte σ_{xy} dans une section sous un chargement de 100 N (figure 2.15):

- $D = 100\text{mm}$,
- $d_{int} = 6\text{mm}$,
- $e = 2\text{mm}$,
- $\alpha = 10^\circ$,

Le matériau considéré comporte 4 plis tressés à $\pm 45^\circ$ de verre/époxy ($V_f = 60\%$) d'épaisseur 0.5 mm.

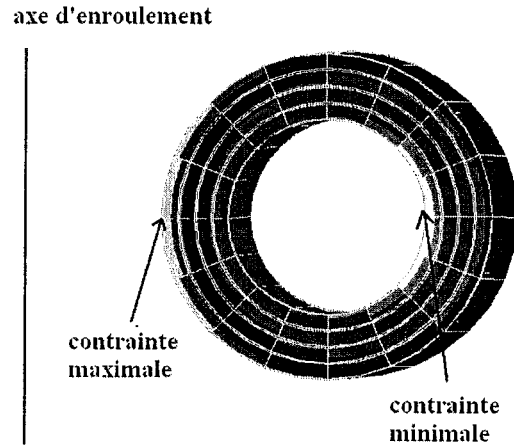


Figure 2.15 : Contraintes de cisaillement dans la section du fil du ressort

On retrouve bien l'allure attendue avec la continuité des contraintes à travers l'épaisseur du matériau, le maximum et le minimum se trouve bien aux endroits attendus de la section, et l'effort est bien essentiellement porté par la partie extérieure de la section. A présent voyons d'un point de vue plus global la répartition des contraintes.

| Contraintes (MPa) | σ_{xx} | σ_{yy} | σ_{zz} | σ_{xy} | σ_{xz} | σ_{yz} |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| maximum | 13,4 | 3,0 | 0,4 | 36,9 | 4,0 | 2,4 |
| minimum | -16,6 | -3,8 | -0,5 | 21,0 | 1,3 | -2,2 |
| moyenne | -0,3 | -0,3 | 0,0 | 28,7 | 0,0 | 0,0 |

Tableau 2.3 : Récapitulatif des différentes contraintes dans le ressort hélicoïdal tubulaire composite sollicité en compression axiale ($F=100\text{ N}$)

Là encore les résultats sont satisfaisants avec une contrainte maximale de cisaillement σ_{xy} bien plus élevée que les autres, notamment trois fois supérieure à la contrainte longitudinale σ_{xx} (tableau 2.3). Observons la répartition de cette contrainte sur la structure : on constate l'homogénéité des observations le long du fil du ressort. Néanmoins une irrégularité a lieu au point d'application du chargement du ressort, à savoir sur la section de l'extrémité supérieure : on note en effet une valeur de la contrainte σ_{xy} significativement élevée (figure 2.16). Cela traduit une zone particulièrement contrainte, ne correspondant pas à la réalité puisqu'une structure hélicoïdale est conçue pour absorber l'énergie de façon uniforme sur la structure.

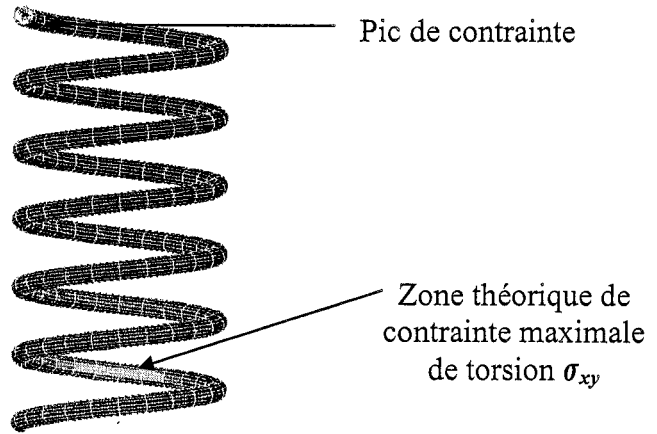


Figure 2.16 : Distribution de σ_{xy} dans le ressort en compression axiale

L'analyse du critère quadratique de Tsai-Wu est plus adaptée pour détecter cette irrégularité: elle prend en compte l'ensemble des contraintes et des résistances à la rupture pour analyser les zones de fragilité locales. Ce critère s'écrit comme :

$$f(F) = \sigma_{xx} \left(\frac{1}{RT_x} - \frac{1}{RC_x} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{1}{RT_y} - \frac{1}{RC_y} \right) + \sigma_{zz} \left(\frac{1}{RT_z} - \frac{1}{RC_z} \right) + \frac{\sigma_{xx}^2}{RT_x RC_x} + \frac{\sigma_{yy}^2}{RT_y RC_y} + \frac{\sigma_{zz}^2}{RT_z RC_z} + \frac{\tau_{xy}^2}{ZR_{xy}} + \frac{\tau_{xz}^2}{ZR_{xz}} + \frac{\tau_{yz}^2}{ZR_{yz}} - \frac{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz}}{\sqrt{RT_x RC_x RT_y RC_y RT_z RC_z}} \quad (2.1)$$

où RT_i représente la résistance en traction selon l'axe i ,

RC_i la résistance en compression selon l'axe i ,

ZR_{ij} la résistance en cisaillement dans le plan ij .

Le critère de Tsai-Wu varie de 0 (pas de sollicitation) à 1 (prédiction de la rupture), et plus sa valeur nominale est élevée, plus cette zone est proche de la rupture. Ce critère est donc idéal pour déceler les zones de plus grande fragilité sur une structure composite (Mallick 1993). On voit sur la figure 2.17 la valeur de ce critère sur l'ensemble du ressort : l'anomalie pressentie avec la distribution des contraintes se confirme au point d'application de la charge. En cette zone, qui ne devrait pas être particulièrement contrainte, on note une sollicitation particulièrement élevée, qui fragilise la structure.

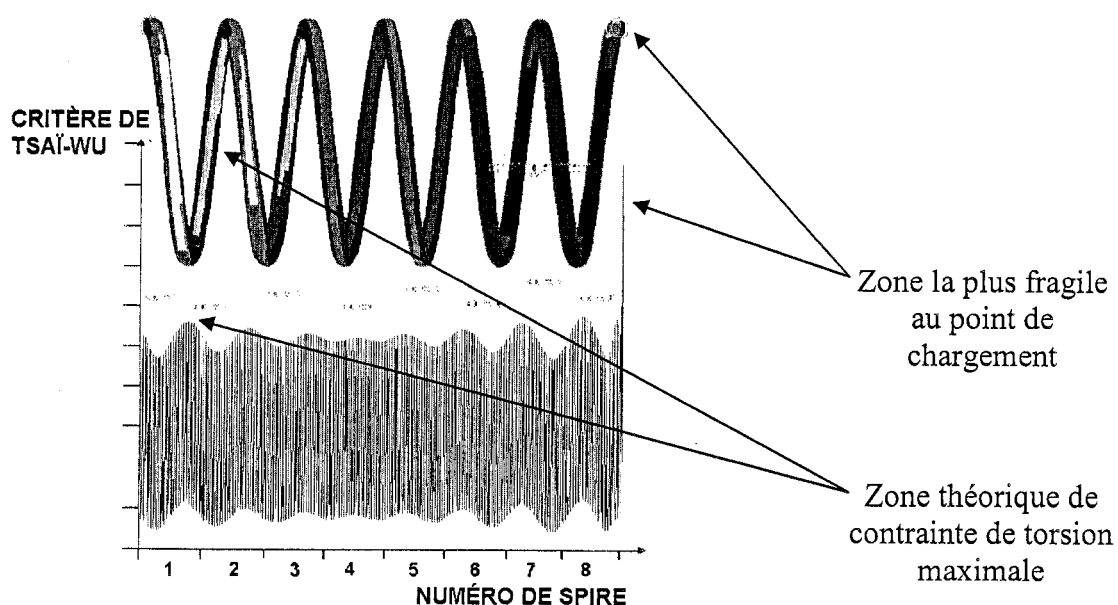


Figure 2.17 : Distribution du critère quadratique de Tsai-Wu dans le ressort

Cette constatation remet en cause la forme du ressort maillé utilisée jusque-là. En effet, on s'est contenté de modéliser les spires actives du ressort sans prendre soin des extrémités, alors que le ressort n'est pas utilisable sous cette forme. Chaque extrémité est généralement munie d'un demi tour mort (une demi-spire dans le plan horizontal). Ceci présente les avantages suivants :

- Une plus grande facilité pour fixer le ressort à la structure (entre deux plaques).
- Une meilleure répartition du chargement axial (centré).
- Une meilleure répartition des contraintes sur l'ensemble de la structure, et donc moins de concentration de contraintes aux points de chargement.

2.3.3 Raffinement du modèle : ajout des tours morts aux extrémités du ressort

Appliquons cette nouvelle stratégie pour trouver des résultats plus convaincants sur la répartition des efforts sur la structure. Deux demi-tours morts d'angle d'hélice nul sont ajoutés à chaque extrémité, ils ne jouent aucun rôle dans la raideur du ressort mais permettent de mieux répartir le chargement sur la structure (figure 2.18).

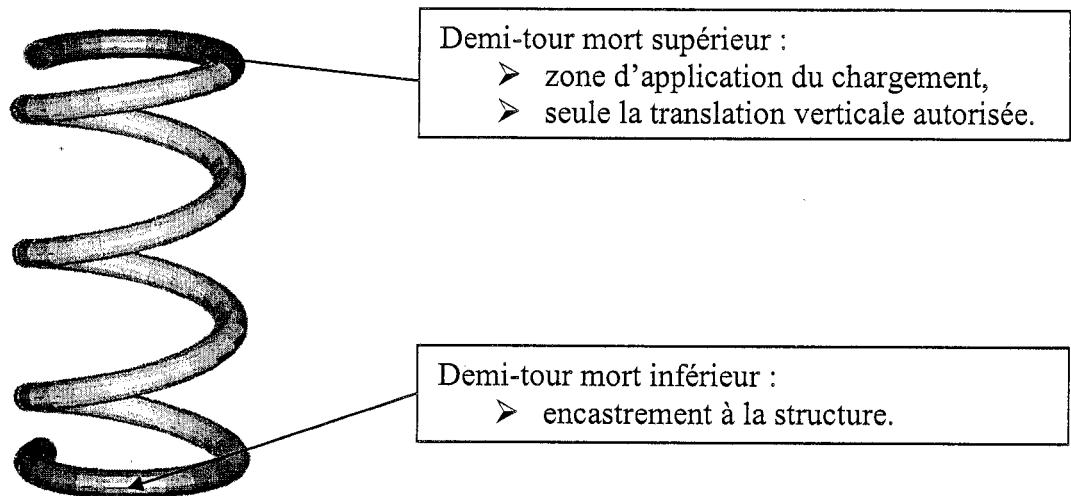


Figure 2.18 : Ajout des demi-tours morts aux extrémités du ressort

La modélisation du chargement reste inchangée par ailleurs. On vérifie aisément que ce maillage donne des résultats identiques en ce qui concerne les déplacements. On va donc comparer et valider les contraintes calculées par rapport à la théorie. Il conviendra néanmoins de se rappeler que la précision d'un calcul par éléments finis est plus grossière pour les contraintes. On effectue une série d'essais numériques en faisant varier les paramètres suivants :

- pas du ressort p de 40 à 60 mm,
- diamètre d'enroulement du ressort D de 60 à 180 mm,
- épaisseur du matériau e de 2 à 5 mm.

On fixe le diamètre intérieur du fil du ressort ($d_{int} = 12$ mm), le nombre de spire ($N = 4$) et le matériau (plis tressés de verre/époxy à $\pm 45^\circ$, soit un module $G = 9500$ MPa). Les résultats sont consignés dans les figures 2.19 et 2.20, afin de mettre en lumière l'influence de l'épaisseur e et de l'angle α sur l'écart à la formule théorique.

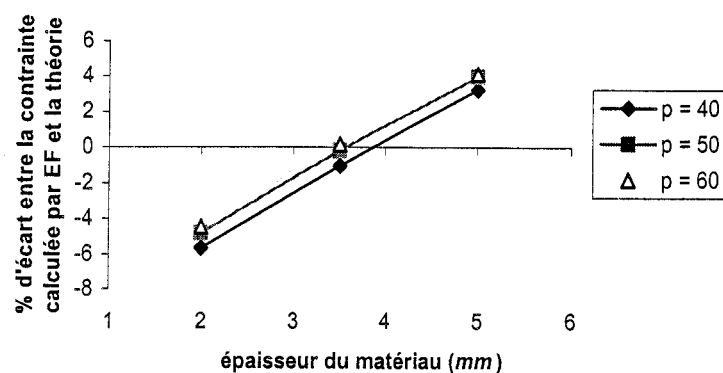


Figure 2.19 : Influence de l'épaisseur du matériau e et du pas p sur l'écart de contraintes maximales

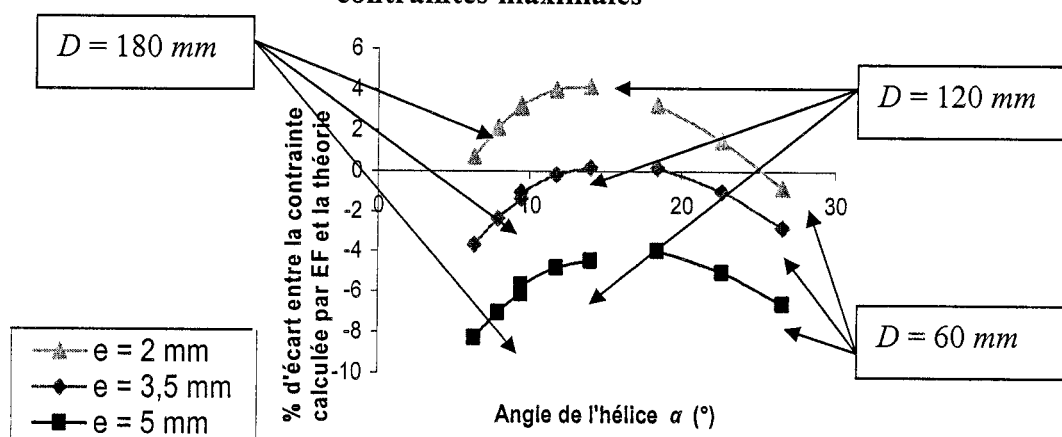


Figure 2.20 : Influence de l'angle de l'hélice α et de l'épaisseur du matériau e sur l'écart de contraintes maximales

Tout d'abord, on remarque l'excellente précision de la simulation pour évaluer la contrainte maximale de cisaillement. En effet on est toujours dans une erreur relative inférieure à 10% par rapport à la formule analytique, ce qui valide de la modélisation adoptée pour les contraintes. En revanche la relation entre l'écart aux hypothèses de la théorie (angle d'hélice α non négligeable, indice faible) et l'écart à la formule analytique est moins évidente que dans le cas des déplacements : la flexion n'est pas le seul phénomène responsable de cet écart.

2.4 Modélisation du matériau composite

2.4.1 Pli solide pour un angle de tressage donné

Il faut être capable dans un premier temps de donner les modules élastiques et les résistances dans toutes les directions d'un composite verre/époxy ($V_f = 60\%$), et ce pour tous les angles de tressage. On a vu en effet que la modélisation par éléments finis met en jeu des éléments volumiques, donc des plis orthotropes solides, dont les constantes mécaniques sont nécessairement connues, même à travers l'épaisseur. On va donc chercher à relier ces constantes mécaniques avec l'angle de tressage $\pm\theta$, en s'appuyant sur les données expérimentales disponibles et la littérature. Il est néanmoins délicat de prendre en compte l'effet de l'ondulation des fibres à cause du manque d'information sur les tresses tubulaires.

2.4.1.1 Pli unidirectionnel

On partira des données d'un pli unidirectionnel (Charlebois 2003) pour calculer et interpoler le comportement mécanique des plis tressés. Le tableau 2.4 indique les valeurs expérimentales obtenues pour un pli unidirectionnel à 0° de verre/époxy.

| E_x (GPa) | E_y (GPa) | G_{xy} (GPa) | ν_{xy} |
|-------------|-------------|----------------|------------|
| 44,4 | 9,37 | 2,6 | 0,301 |

Tableau 2.4 : Constantes d'un pli unidirectionnel à 0° en verre/époxy ($V_f = 60\%$)

On ne dispose pas de la connaissance des constantes mécaniques dans l'épaisseur (direction z), mais on peut toutefois supposer que, puisque les fibres ne sont jamais orientées selon cet axe, elles n'influencent que très peu les propriétés mécaniques. Ainsi on prend les valeurs du module longitudinal de la matrice époxy ($E_z = 2 \text{ GPa}$), ainsi que son module de cisaillement ($G = 0.76 \text{ GPa}$) et son coefficient de Poisson ($\nu = 0.3$).

2.4.1.2 Pli tressé

À présent en s'appuyant sur les lois de la théorie des laminés, et en supposant le matériau orthotrope (ce qui revient à **négliger l'ondulation des fibres**), on calcule les valeurs de plis tressés à $\pm\theta$ pour un angle variant de 20° à 70° (Zebdi 2004). En effet en dessous de 20° comme au delà de 70° , on risque d'atteindre un angle de blocage, où les

fibres entrent en contact les unes avec les autres, provoquant un flambement local qui fait perdre au pli sa rigidité. Le tableau 2.5 résume les diverses constantes mécaniques.

| $\pm\theta [^\circ]$ | $E_x [GPa]$ | $E_y [GPa]$ | $E_z [GPa]$ | ν_{xy} | ν_{yz} | ν_{xz} | $G_{xy} [GPa]$ | $G_{yz} [GPa]$ | $G_{xz} [GPa]$ |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|----------------|----------------|----------------|
| 20 | 32,25 | 7,03 | 2 | 0,71 | 0,26 | 0,15 | 6,59 | 0,84 | 2,03 |
| 25 | 26,09 | 7,15 | 2,01 | 0,83 | 0,24 | 0,10 | 8,27 | 0,88 | 1,82 |
| 30 | 19,96 | 7,71 | 2,01 | 0,9 | 0,21 | 0,07 | 9,85 | 0,93 | 1,63 |
| 35 | 14,78 | 7,55 | 2,01 | 0,89 | 0,18 | 0,06 | 11,14 | 1 | 1,46 |
| 40 | 11,08 | 7,83 | 2,02 | 0,82 | 0,14 | 0,08 | 11,98 | 1,08 | 1,31 |
| 45 | 8,88 | 8,88 | 2,02 | 0,71 | 0,11 | 0,11 | 12,27 | 1,19 | 1,19 |
| 50 | 7,83 | 11,08 | 2,02 | 0,58 | 0,08 | 0,14 | 11,98 | 1,31 | 1,08 |
| 55 | 7,55 | 14,78 | 2,01 | 0,46 | 0,07 | 0,18 | 11,14 | 1,46 | 1 |
| 60 | 7,31 | 19,96 | 2,01 | 0,35 | 0,07 | 0,21 | 9,85 | 1,63 | 0,93 |
| 65 | 7,15 | 26,09 | 2,01 | 0,24 | 0,06 | 0,24 | 8,27 | 1,82 | 0,88 |
| 70 | 7,03 | 32,25 | 2,01 | 0,26 | 0,06 | 0,26 | 6,59 | 2,03 | 0,84 |

Tableau 2.5 : Constantes mécaniques de plis tressés en verre/époxy ($V_f = 60\%$) en fonction de l'angle de tressage, d'après Zebdi (2004)

On est alors capable d'interpoler des courbes liant les constantes mécaniques aux angles de tressage. Ainsi la figure 2.21 montre l'évolution du module de cisaillement plan, qui gouverne la rigidité du matériau. La rigidité en torsion est donc maximale pour un angle de tressage de $\pm 45^\circ$, comme le laisse prévoir la théorie des laminés. On aurait pu, plutôt que de construire des interpolateurs pour chacune des constantes mécaniques, utiliser les relations analytiques, tirées de la théorie des stratifiés, pour avoir la relation littérale entre l'angle de tressage et les constantes mécaniques du pli tressé (Mallick 1993).

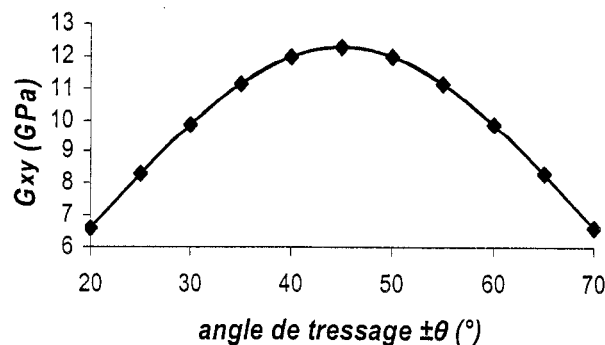


Figure 2.21 : Évolution du module de cisaillement G_{xy} selon l'angle de tressage $\pm\theta$

2.4.1.3 Résistance d'un pli tressé

L'analyse est plus délicate pour les résistances d'un pli tressé en fonction de son angle de tressage. En effet il n'existe pas de lois d'homogénéisation permettant de passer de plis unidirectionnels à **un seul pli orthotrope**. On se base donc sur les valeurs expérimentales de Charlebois (2003), en considérant que **les résistances selon l'épaisseur (axe z) sont contrôlées par la matrice**. En guise de complément pour l'interpolation, l'étude menée par Harte et Fleck (2000) donne les tendances que le tube tressé en verre/époxy suit selon l'angle de tressage, notamment la résistance en torsion. Le tableau 2.6 donne les valeurs des résistances considérées, avec :

- RT_i résistance en traction selon l'axe i ,
- RC_i résistance en compression selon l'axe i ,
- ZR_{ij} résistance en cisaillement dans le plan ij .

On procède alors de la même façon pour élaborer, à partir de ces valeurs empiriques, des interpolations donnant les valeurs des résistances pour tout angle de tressage. On note que ces valeurs de résistance interpolées sont le plus sujettes à question, et devront être remise en cause lors des résultats, puisque ces valeurs auraient du être complètement tirées d'une caractérisation mécanique du matériau. Zebdi (2004) apporte des éléments d'informations, mais pour des angles de tressage de 16° à 29° seulement.

| $\pm\theta [^\circ]$ | RT_x [Mpa] | RC_x [Mpa] | RT_y [Mpa] | RC_y [Mpa] | RT_z [Mpa] | RC_z [Mpa] | ZR_{xy} [Mpa] | ZR_{xz} [Mpa] | ZR_{yz} [Mpa] |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 20 | 360 | 250 | 48 | 130 | 80 | 80 | 28 | 20 | 20 |
| 25 | 300 | 220 | 50 | 125 | 80 | 80 | 30 | 20 | 20 |
| 30 | 250 | 180 | 55 | 120 | 80 | 80 | 35 | 20 | 20 |
| 35 | 200 | 150 | 60 | 110 | 80 | 80 | 48 | 20 | 20 |
| 40 | 150 | 120 | 70 | 105 | 80 | 80 | 55 | 20 | 20 |
| 45 | 80 | 100 | 80 | 100 | 80 | 80 | 60 | 20 | 20 |
| 50 | 70 | 105 | 150 | 120 | 80 | 80 | 62 | 20 | 20 |
| 55 | 60 | 110 | 200 | 150 | 80 | 80 | 65 | 20 | 20 |
| 60 | 55 | 120 | 250 | 180 | 80 | 80 | 68 | 20 | 20 |
| 65 | 50 | 125 | 300 | 220 | 80 | 80 | 70 | 20 | 20 |
| 70 | 48 | 130 | 360 | 250 | 80 | 80 | 71 | 20 | 20 |

Tableau 2.6 : Valeurs des résistances du pli en fonction de l'angle de tressage

2.4.2 Stratifiés avec différents angles de tressage

2.4.2.1 Torsion d'un tube

Pour permettre de généraliser l'étude à des stratifiés comportant des plis de différents angles de tressage, il faut examiner la nature de la sollicitation en torsion d'un stratifié tubulaire. En effet selon que le pli se trouve situé plus ou moins à l'intérieur de l'empilement, il sera plus ou moins soumis à l'effort de torsion. En supposant que :

- la section de la membrane plane avant la torsion reste plane après la torsion;
- le diamètre de la membrane ne change pas durant le chargement;
- le matériau reste toujours dans son état élastique;

la contrainte de cisaillement dû à un couple de torsion est donnée par :

$$\tau = \frac{M_t \cdot d}{I_0} \quad (2.2)$$

où :

M_t moment de torsion, $M_t = \frac{F \cdot D}{2}$ pour un ressort hélicoïdal,

d diamètre du pli,

I_0 moment d'inertie, $I_0 = \frac{\pi}{32} (d_{ext}^4 - d_{int}^4)$ pour un tube.

L'application d'un couple de torsion sur un tube induit une déformation angulaire : l'angle de torsion β . Cet angle est lié à la déformation de cisaillement γ par la relation :

$$\gamma = \frac{d}{2L} \beta \quad (2.3)$$

Avec L longueur du tube.

La contrainte de cisaillement σ_{xy} découle linéairement de la déformation γ (loi de Hooke) :

$$\sigma_{xy} = G_{xy} \gamma \quad (2.4)$$

Ainsi en combinant les équations on obtient :

$$\beta = \frac{M_t \cdot L}{G_{xy} I_0} \quad (2.5)$$

2.4.2.2 Application pour chaque pli

Un tube constitué de plusieurs plis superposés va répartir le moment total M_t sur chacun des n plis :

$$M_t = \sum_{i=1}^n M_i \quad (2.6)$$

L'angle de déformation β du tube est constant pour chaque pli, soit :

$$\beta = \frac{M_1 L}{G_1 I_{01}} = \frac{M_2 L}{G_2 I_{02}} = \dots = \frac{M_i L}{G_i I_{0i}} = \dots = \frac{M_n L}{G_n I_{0n}}$$

avec

G_i module de cisaillement G_{xy} du pli i ,

M_i moment appliqué sur le pli i ,

I_{0i} moment d'inertie du pli i , $I_{0i} = \frac{\pi}{32} (d_{i\text{ext}}^4 - d_{i\text{int}}^4)$.

On a alors accès au moment M_i appliqué à chacun des plis, par la relation :

$$M_i = \frac{G_i I_{0i}}{G_t I_{0t}} M_t \quad (2.7)$$

avec

$$G_t I_{0t} = \sum_{i=1}^n G_i I_{0i} \quad (2.8)$$

Finalement on peut écrire la contrainte σ_{xy} dans chaque pli à avec la relation suivante :

$$\sigma_i = \frac{M_i \cdot d_{i\text{ext}}}{I_{0i}}$$

En outre, on peut obtenir un module de cisaillement G_t équivalent sur l'ensemble du tube, en reformulant l'équation 2.7 (le moment d'inertie global du tube I_{0t} est connu) :

$$G_t = \frac{\sum_{i=1}^n G_i I_{0i}}{I_{0t}} \quad (2.9)$$

Ce module équivalent servira dans l'expression de la formule analytique (1.8) de la raideur pour des stratifiés de plis de différents angles de tressage. En outre il permet de

calculer un angle de tissage « équivalent » pour le stratifié. Cet angle équivalent $\pm\theta_{eq}$ servira à généraliser les calculs effectués pour des ressorts avec un seul angle de tissage pour le composite. Il sera notamment utile pour l'utilisation des fonctions de correction pour la raideur et les contraintes (cf. chapitre 3) et permet de ne considérer qu'un seul angle de tissage comme paramètre inhérent au matériau. On valide cette approche théorique par une analyse SYSPLY sur un ressort de caractéristiques suivantes :

- diamètre d'enroulement $D = 120 \text{ mm}$,
- diamètre intérieur $d_{int} = 8 \text{ mm}$,
- épaisseur d'un pli $e_{pli} = 1 \text{ mm}$,
- nombre de plis $n = 5$.
- pas de l'hélice $p = 60 \text{ mm}$,
- nombre de spires actives $N = 4$,
- angles de tissage $\pm\theta_i = 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$.

La figure 2.22 justifie l'approche théorique choisie pour calculer la contrainte induite dans chaque pli. L'écart qui subsiste est minime, et s'explique par les mêmes raisons qu'à la section 2.3.

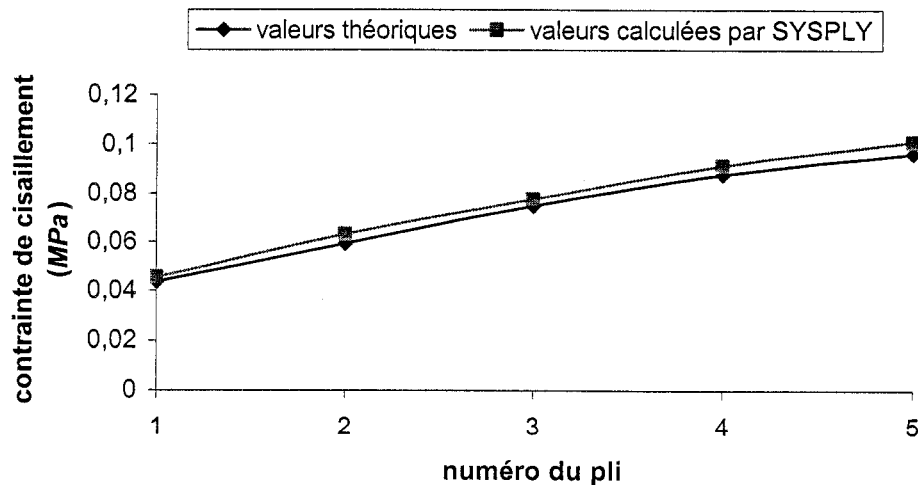


Figure 2.22 : Comparaison des contraintes calculées dans chaque pli par la théorie et par éléments finis, pour un ressort hélicoïdal sous une charge $F=1.424 \text{ N}$.

2.5 Bilan

On a donc trouvé une modélisation du ressort dont les résultats en compression axiale coïncident avec la théorie. On utilise pour cela une analyse par éléments finis avec des éléments volumiques et un matériau orthotrope pour simuler les plis tressés. Mieux que cela, les écarts enregistrés proviennent de la théorie elle-même, dont les hypothèses sont trop restrictives au regard de la gamme de ressorts considérée. Car les ressorts sont sollicités en torsion mais aussi en flexion. Par exemple pour des angles d'hélice importants ($\alpha > 15^\circ$), le diamètre d'enroulement D grandit lors de la compression. Or ces valeurs d'angles d'hélice sont tout à fait envisageables pour les ressorts composites.

Ainsi, grâce à cette analyse par éléments finis, on est capable d'estimer plus précisément qu'avec les formules analytiques la raideur et les contraintes. En construisant des fonctions d'erreur de la raideur et de la contrainte maximale, on peut conserver le gain d'information sans avoir recours à chaque fois à une nouvelle analyse par éléments finis plus coûteuse en temps de calcul. On construira à cette fin un interpolateur pour évaluer, en chaque point de l'espace des paramètres, l'erreur générée par les approximations des formules analytiques. La méthodologie sera développée au chapitre 3, puis l'interpolateur construit sera employé dans l'algorithme d'optimisation multicritères.

Chapitre 3 : Calcul des fonctions-objectifs

On s'intéresse à présent à l'évaluation des différentes performances du ressort dans le cadre de l'optimisation de ses propriétés. Parmi les performances statiques retenues habituellement pour le calcul des ressorts, la constante de raideur, la masse, les contraintes maximales de cisaillement, la déflexion et la charge maximale admissible, la tenue en fatigue et au flambage, constituent autant de fonctions-objectifs à connaître pour optimiser efficacement une structure destinée à un usage précis. On s'appuiera sur la modélisation du chapitre précédent, une analyse par éléments finis avec des éléments volumiques dans le cas d'un matériau orthotrope pour évaluer de façon précise ces différentes performances.

3.1 Analyse de sensibilité des paramètres

Il convient toutefois de prendre en compte le temps d'évaluation d'une fonction-objectif, car ce processus sera répété à de nombreuses reprises au cours de l'optimisation. Si on considère le cas de la constante de raideur, il est plus rapide d'évaluer ce critère avec la formule analytique (1.8) que d'en déterminer la valeur à l'aide d'une analyse par éléments finis. Néanmoins c'est cette dernière valeur, plus précise, qu'il faut être capable de retourner lors de l'évaluation. Ainsi, en ayant recours à une analyse de sensibilité des différents paramètres responsables de l'écart entre la valeur rendue par la formule analytique et celle donnée par la méthode des éléments finis, on va chercher à construire une fonction corrective rapide à évaluer, qui donnera une valeur plus précise que la formule analytique.

3.1.1 Constante de raideur du ressort

Les différences existant entre l'analyse par éléments finis et la théorie viennent des hypothèses trop restrictives de la formule analytique. On a vu au chapitre 2 que la théorie ne considère que l'effort de torsion sur la structure et devient donc moins précise quand les sollicitations en flexion grandissent, comme c'est le cas pour des angles d'hélices élevés ($\alpha > 15^\circ$), des structures minces (rapport e/d_{ext} faible) ou un indice faible

($C < 6$). Comme ces paramètres ont une influence critique sur la précision de la formule analytique, ils interviendront dans la construction de la fonction corrective. Celle-ci permettra ainsi d'élargir la gamme de paramètres géométriques considérés pour la phase d'optimisation, sans se limiter à des valeurs d'indices élevés par exemple.

D'autres paramètres, comme le nombre de spires N ou l'angle de tressage $\pm\theta$ du matériau, ont une influence sur la raideur. Pour vérifier que les autres paramètres n'ont pas d'effet sur l'écart observé entre les modélisations, on procède à plusieurs simulations avec des ressorts de diamètre respectifs 100 mm, 150 mm, 200 mm, 250 mm et 300 mm, en respectant les valeurs suivantes :

- $C = 5$,
- $\alpha = 9.68^\circ$
- $\frac{e}{d_{ext}} = 0.1$,
- $N = 4$ spires actives,
- $\pm\theta = 45^\circ$

On retourne l'écart relatif $\frac{k_{EF} - k_{théo}}{k_{théo}}$,

avec

- k_{EF} raideur calculée par SYSPLY,
- $k_{théo}$ raideur donnée par la formule analytique (1.8).

La figure 3.1 indique que l'erreur ne dépend donc que des 5 paramètres fixés.

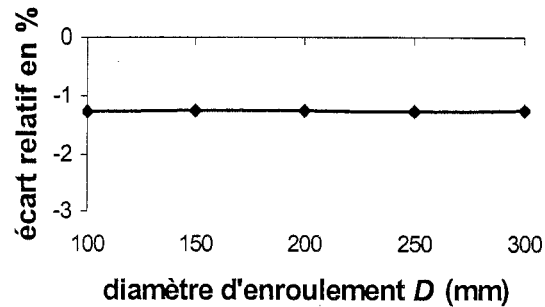


Figure 3.1 : Sensibilité de l'écart en fonction du diamètre d'enroulement D

A présent, pour s'assurer que chaque paramètre a une influence, on répète les simulations avec le logiciel SYSPLY en ne faisant varier qu'un paramètre à la fois. Un

écart relatif négatif signifie que la raideur retournée par SYSPLY est plus faible que la valeur analytique. C'est le cas pour des ressorts d'indices inférieurs à 7.5, mais au-delà la tendance s'inverse (cf. figure 3.2).

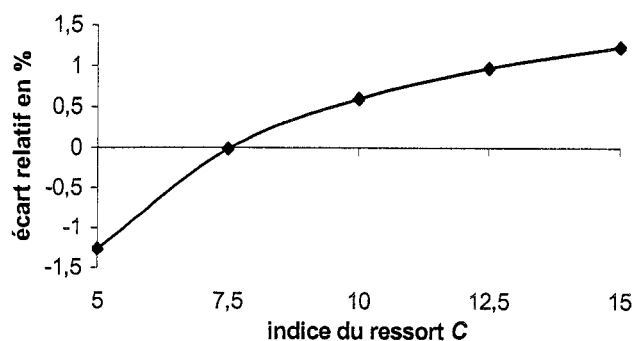


Figure 3.2 : Influence de l'indice du ressort sur l'écart de raideur

L'angle de l'hélice joue également un rôle : on remarque que l'écart relatif passe par un « sommet » vers $\alpha = 9^\circ$. Cela montre l'influence antagoniste de 2 phénomènes pour les angles d'hélice élevés ($\alpha > 10^\circ$) : la flexion qui a pour effet de raidir davantage le ressort, alors que l'accroissement du diamètre d'enroulement D lors de la compression, va amollir la structure (figure 3.3).

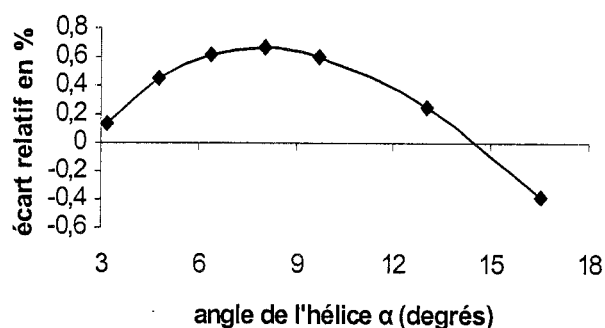


Figure 3.3 : Influence de l'angle de l'hélice α sur l'écart de raideur

Le rapport d'élancement du fil e/d_{ext} joue de façon unilatérale contrairement aux deux autres : les rapports les plus importants, c'est-à-dire les structures les plus épaisses, tendent à minimiser l'écart (figure 3.4).

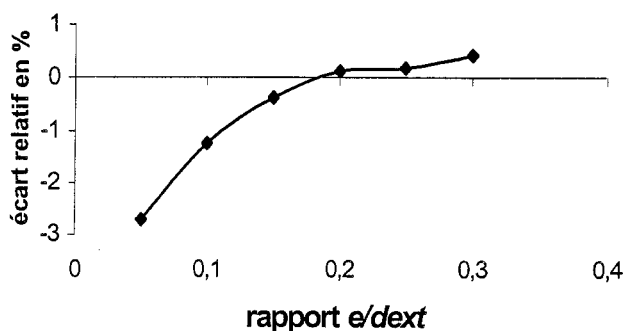


Figure 3.4 : Influence de l'élancement du fil e/d_{ext} sur l'écart de raideur

Enfin, le nombre de spires amplifie l'écart : ceci semble logique car les phénomènes « parasites », c'est-à-dire non pris en compte par la théorie, seront d'autant plus important que le ressort est plus long (figure 3.5).

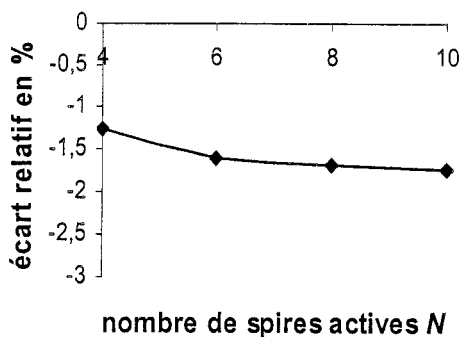


Figure 3.5 : Influence du nombre de spires N sur l'écart de raideur

Pour ce qui est de l'angle de tressage $\pm\theta$ du matériau, il joue un rôle prépondérant dans l'écart observé. En réalité, cette variable liée au matériau traduit l'influence de l'ensemble des constantes mécaniques d'un pli tressé pour un angle de tressage et un taux de fibre donnés. Il est surtout relié au module de cisaillement G_{xy} , employé dans la formule analytique (1.8). Ainsi on se reporte au chapitre 2.4 pour détailler ces relations, et on examine notamment la façon de passer d'un seul à plusieurs angles de tressage dans un stratifié, c'est-à-dire de calculer un module de cisaillement G_{eq} équivalent pour le stratifié. Cela permet de ne mener les analyses avec SYSPLY que dans le cas particulier où tous les plis du stratifié ont le même angle de tressage pour évaluer les fonctions de correction, puis de généraliser avec des stratifiés dont les plis ont des angles différents.

3.1.2 Contrainte maximale de torsion

Une autre donnée essentielle pour évaluer la performance du ressort est la contrainte maximale de torsion induite dans le fil du ressort sous un chargement donné. En effet cette contrainte permet de connaître la marge par rapport à la rupture du matériau estimée par le critère de Tsai-Wu (ce point sera détaillé à la section 3.1.3). De la même façon que pour la constante de raideur, on dispose d'après la théorie des ressorts d'une formule analytique (1.6), qui repose certes sur des hypothèses restrictives, mais décrit bien le phénomène pour une certaine gamme de paramètres (Wahl 1963). Cependant puisque notre étude déborde de ces hypothèses, il convient d'utiliser l'analyse par éléments finis pour affiner l'évaluation de cette grandeur. Les paramètres responsables de cet écart sont strictement les mêmes que pour la raideur. En effet en reprenant les 6 ressorts décrit précédemment à la section 3.1.1, pour lesquels l'indice du ressort C , l'angle de l'hélice α , le rapport e/d_{ext} , le nombre de spires N et l'angle de tressage $\pm\theta$ sont constants, et en appliquant une même charge de compression, on obtient un écart relatif $\frac{\tau_{EF} - \tau_{théo}}{\tau_{théo}}$ constant (figure 3.6) avec :

- τ_{EF} contrainte maximale de torsion calculée par éléments finis,
- $\tau_{théo}$ contrainte maximale de torsion donnée par la formule analytique.

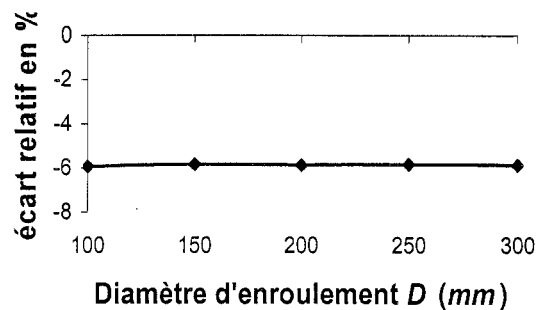


Figure 3.6 : Sensibilité de l'écart relatif pour la contrainte maximale de torsion

Assurons-nous encore une fois de la dépendance de chacun des paramètres indépendamment, en les faisant varier un par un. Pour l'indice du ressort C , qui est déjà présent dans la formule par l'intermédiaire du facteur de correction de Wahl, on voit que l'écart augmente pour les indices élevés (figure 3.7).

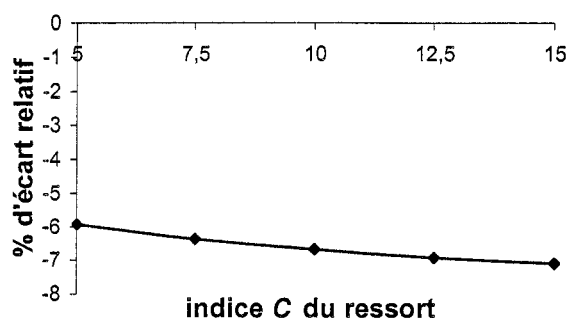


Figure 3.7 : Influence de l'indice du ressort C sur l'écart de contraintes maximales

En ce qui concerne l'angle de l'hélice α , comme pour la raideur du ressort, on passe par un écart minimal au milieu de la gamme (figure 3.8). Cet optimum montre la coexistence de deux phénomènes qui ont une influence contradictoire sur l'écart entre la modélisation SYSPLY et la formule analytique : puisque le ressort est moins raide que prévu dans les grands angles (D grandit au cours de la compression), la contrainte induite est plus forte que celle donnée par la formule analytique. D'autre part l'existence d'une sollicitation de flexion pour des angles d'hélice élevés ($\alpha > 10^\circ$) tend à baisser la sollicitation de torsion et de ce fait la formule analytique surestime la contrainte de torsion.

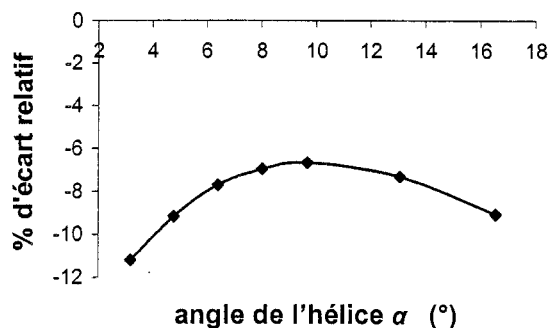


Figure 3.8 : Influence de l'angle de l'hélice α sur l'écart de contraintes maximales

Quant au rapport d'élanement du fil e/d_{ext} , il agit linéairement sur l'écart relatif observé et amène à surévaluer les contraintes dans le cas des ressorts à parois minces et à les sous-évaluer pour les ressorts à parois épaisses (figure 3.9).

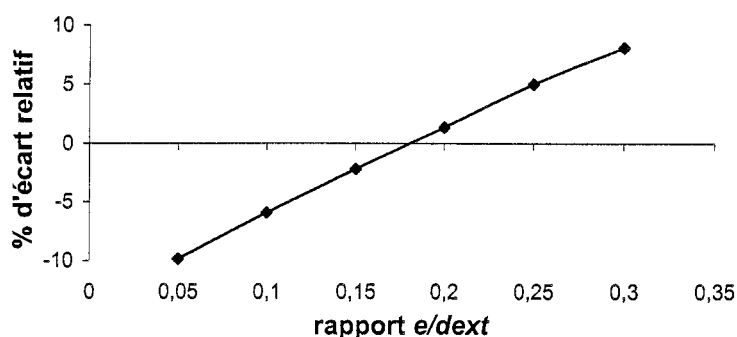


Figure 3.9 : Influence du rapport e/d_{ext} sur l'écart de contraintes maximales

Enfin comme prévu, un nombre de spires croissant tend à augmenter l'écart observé, car les ressorts plus longs amplifient les effets parasites (figure 3.10).

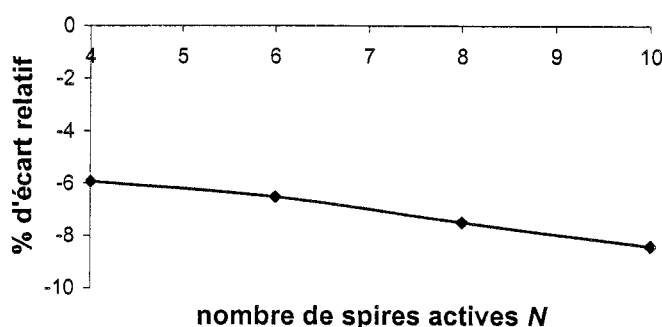


Figure 3.10 : Influence du nombre de spires N sur l'écart de contraintes maximales

Quant à l'effet du paramètre matériau, il est représenté par l'intermédiaire de l'angle de tressage $\pm\theta$ qui agit à travers toutes les constantes mécaniques (module de Young, coefficient de poisson, module de cisaillement) du pli tressé. On se reporte à la section 2.4 pour une analyse plus détaillée, notamment pour la façon de traiter plusieurs plis avec des angles de tressage différents, et le calcul d'un angle de tressage « équivalent » $\pm\theta_{eq}$ sur le stratifié. Cela permet de mener l'analyse des écarts pour un seul et unique angle de tressage dans le stratifié.

3.1.3 Autres fonctions-objectifs

Le point de départ de l'analyse est bien l'évaluation précise de la constante de raideur et de la contrainte de torsion induite, puisque nous allons voir que les autres performances statiques du ressort découlent de ces deux grandeurs.

➤ Charge maximale admissible P_{max} :

En chaque point, on évalue une fonction scalaire, combinaison des contraintes et des résistances, qui traduit le niveau de sollicitation en ce point précis et la marge par rapport à la rupture du matériau. Cette méthode est couramment utilisée pour la conception de structures composites, où l'on évalue le critère pli par pli. Ceci indique en même temps le pli critique, lieu de l'initiation de la rupture (Mallick 1993). En revanche, cette approche ne donne pas accès au mode de rupture. L'expression du critère quadratique de Tsai-Wu est donnée par la formule (2.1). La connaissance de ce critère requiert, en tout point, une somme de valeurs considérables tant pour les contraintes que pour les constantes mécaniques et les résistances de chaque pli. Cependant une analyse du ressort avec SYSPLY en compression axiale permet de réduire le nombre de variables significatives, puisque seules les contraintes de torsion σ_{xy} , et de flexion σ_{xx} ont une valeur non négligeable. Pour obtenir la valeur maximale du critère de Tsai-Wu, seule la valeur de la contrainte maximale est nécessaire. Or les efforts de torsion et de flexion n'ont pas lieu au même endroit dans le ressort, comme le montre la figure 3.11.

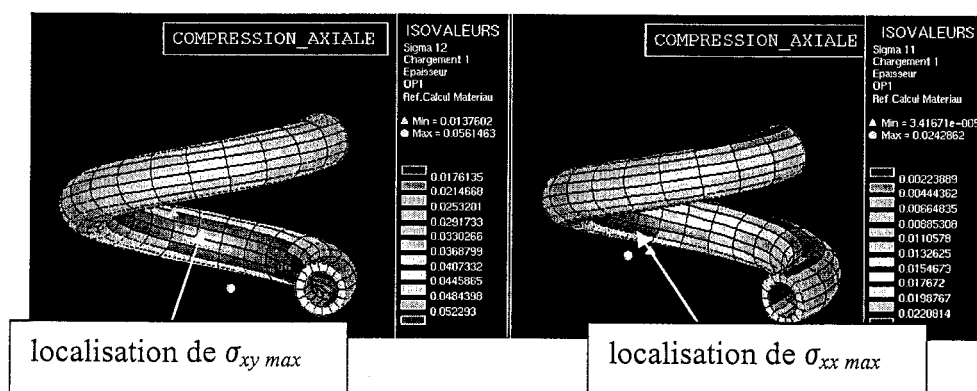


Figure 3.11 : Répartition des contraintes de torsion σ_{xy} et de flexion σ_{xx} dans une spire d'un ressort en compression axiale

Par ailleurs il faut prendre en compte le rapport des valeurs contraintes sur résistances : dans ce cas on s'aperçoit que les contraintes de torsion sont prédominantes par rapport aux autres, puisqu'elles sont au moins deux fois plus grandes alors que les résistances sont près de dix fois moindre pour la gamme de matériaux considérés! Ainsi on pourra se concentrer uniquement sur les contraintes maximales de cisaillement pour

obtenir une très bonne approximation du critère de Tsai-Wu $f(F)$, et par suite de la charge admissible P_{max} :

$$f(F) \approx \frac{\tau_{xy}^2}{Z R_{xy}^2} \quad (3.1)$$

La charge admissible P_{max} est telle que le critère de Tsai-Wu sous cette charge vaut 1.

➤ Déflexion admissible δ_{max}

Connaissant la charge admissible P_{max} et la constante de raideur k , on a directement accès à la déflexion maximale admissible par le ressort δ_{max} . Ceci permet notamment de savoir si le contact entre spires peut avoir lieu avant la rupture. La déflexion maximale admissible s'écrit :

$$\delta_{max} = \frac{P_{max}}{k} \quad (3.2)$$

➤ Énergie élastique U_{max}

L'énergie élastique absorbable par le ressort U_{max} et l'énergie élastique spécifique U_{Smax} par unité de masse du ressort sont des grandeurs intéressantes pour servir de critère de choix lors de l'étape de conception, puisqu'elles traduisent la capacité intrinsèque du ressort à remplir sa fonction. Elles s'écrivent :

$$U_{max} = \frac{1}{2} k \delta^2, \quad (3.3)$$

$$U_{Smax} = \frac{1}{2m} k \delta^2 \quad (3.4)$$

➤ Fréquence de résonance f_R

Enfin la fréquence de résonance propre du ressort est à éviter pour ne pas causer des dommages irréversibles lors de son utilisation. Cette fréquence est évaluée par la formule :

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.5)$$

La figure 3.12 récapitule les différents liens entre les fonctions-objectifs, qui à l'exception du flambage découlent toutes de trois grandeurs fondamentales pour le ressort hélicoïdal : la masse m , la raideur k et la contrainte maximale de torsion τ_{max} , d'où le soin particulier lors de leur évaluation.

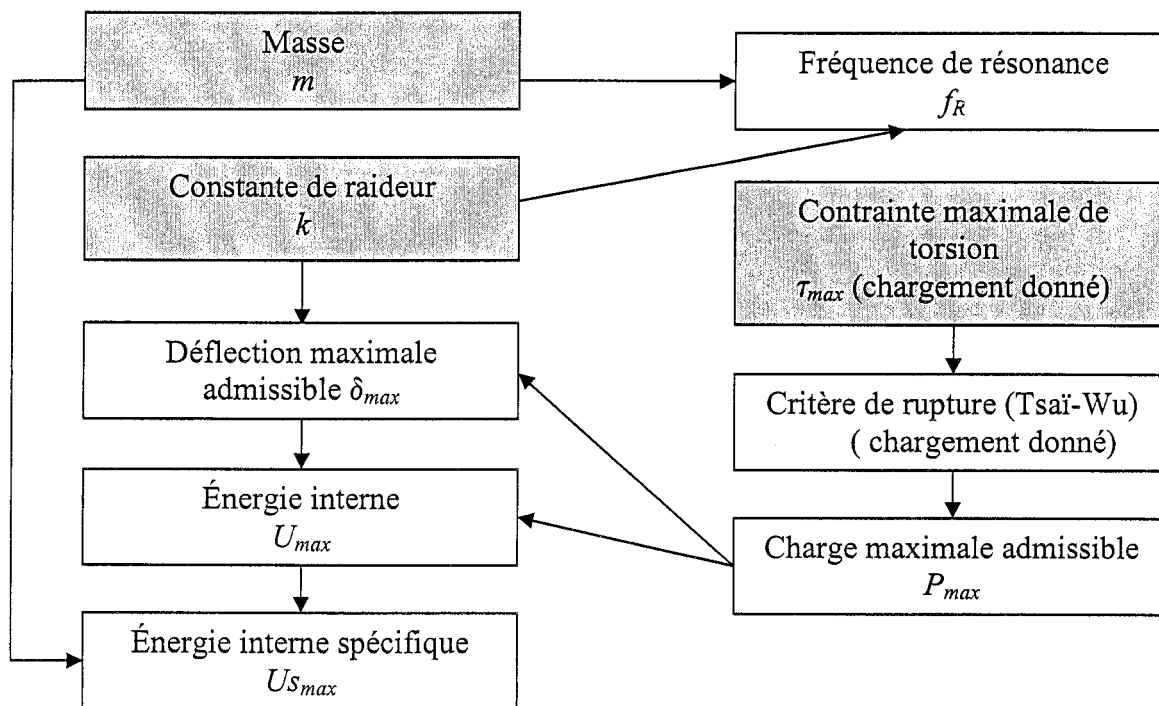


Figure 3.12 : Liens entre les différentes fonctions-objectifs

3.2 Principes des fonctions de correction

3.2.1 Principe d'élaboration et objectifs

Mis à part le cas du flambage, on a vu que la seule connaissance de la constante de raideur k et de la contrainte maximale de torsion τ_{max} permettent d'évaluer tous les autres indices de performances. Ainsi on souhaite prendre en compte l'influence des paramètres caractéristiques, soit l'indice du ressort C , le rapport d'élancement du fil e/d_{ext} , l'angle de l'hélice α , le nombre de spires actives N et l'angle de tressage des plis $\pm\theta$ sur l'écart observé entre les formules analytiques et la modélisation par éléments finis.

Il convient de garder à l'esprit que ces évaluations étant fréquentes dans l'algorithme d'optimisation, elles ne doivent pas présenter un temps de calcul prohibitif. D'autre part le nombre de simulations menées par SYSPLY sera forcément limité pour la gamme de paramètres considérée, autant pour des raisons de temps que d'utilité pratique. Après avoir analysé l'influence de chacun des paramètres séparément, il faut être capable de prédire le comportement mécanique du ressort en fonction de tous les paramètres considérés simultanément, d'où le recours à un interpolateur. Celui-ci est généré à partir de quelques points de mesure, à savoir des simulations de SYSPLY réparties de façon adéquate sur l'espace total des variables. On fait alors appel à la notion de plan d'expérience, pour maximiser l'information acquise par l'interpolateur pour chaque point de mesure.

Par ailleurs, comme les analyses par éléments finis donnent un résultat exact, un interpolateur précis doit être sans biais, c'est-à-dire passer par les points de mesure. C'est pourquoi la méthode des moindres carrés, qui ne passe pas en général par les points de mesure, est à éviter. On peut envisager une méthode d'approximation des éléments finis avec des polynômes linéaires par morceaux entre chaque observation, mais dans ce cas le modèle aura une dérivée discontinue. Cela n'est pas le cas de notre modèle, plus régulier car il traduit un phénomène physique : la dérivée de l'écart de modélisation est continue en chaque point. Pour construire un interpolateur plus régulier, on peut s'inspirer des méthodes de type « splines », qui passent par les points de mesures et minimisent la courbure de la fonction de réponse. Néanmoins il sera plus avantageux de retenir une généralisation de cet interpolateur, le krigeage, qui, en tant que meilleur estimateur linéaire sans biais, permet de satisfaire ces contraintes tout en se révélant facile d'utilisation et rapide à évaluer. Le krigeage, issu de la géostatistique, a déjà été employé avec succès à maintes reprises dans plusieurs champs d'application très divers, comme le génie minier, pétrolier, environnemental ou encore la compression de données (Trochu 1993, Kamanayo, Trochu et Sanschagrin 1994).

3.2.2 Plan d'expérience

Le concept de plan d'expérience (*Design of Experiment*, Atkinson et Donev 1992) intervient dans un domaine de la statistique visant à analyser les interactions de plusieurs variables indépendantes ou couplées, sur des variables de réponse, à des fins de modélisation et d'optimisation. En général un processus se compose de plusieurs phases : tamisage, raffinement et exploitation du modèle. La phase de tamisage est destinée à sélectionner les variables agissant véritablement sur la réponse, de façon autonome ou couplée. Cela est surtout utile quand on n'a aucune connaissance *a priori* sur les phénomènes mis en jeu, mais on a déjà identifié à la section 3.1 les variables significatives. La phase de raffinement permet, en disposant intelligemment les points de mesure, de maximiser la connaissance des interactions et de construire ainsi le meilleur modèle possible compte tenu d'un nombre limité de mesures disponibles.

Plusieurs types de plans d'expérience sont disponibles pour choisir les points de mesure. Tout d'abord on assigne à chaque paramètre un nombre de modalités, soit le nombre de valeurs différentes qu'il peut prendre. Il faut donc discrétiser les variables continues. Puis on bâtit le plan d'expérience proprement dit : un plan est dit complet s'il intègre chaque possibilité ou fractionnaire s'il n'en prend qu'une partie. Pour un problème à 5 paramètres ou plus, il est peu commode d'opérer avec des plans complets, à moins de n'avoir que deux modalités, ce qui correspond à une phase de tamisage. Dans notre cas, les paramètres sont des variables continues, sauf le nombre de spires actives N , mais leur influence est régulière. Ainsi en prenant trois modalités par paramètre on a une idée précise du phénomène. Ces modalités sont prises aux bornes et au centre de la gamme des paramètres. Si l'on établissait un plan complet, on aurait $3^5 = 243$ mesures à effectuer, on se porte donc vers un plan factoriel, qui comprend $3^{5-1} = 81$ mesures (on se reportera à l'annexe 1 pour le détail de ces mesures).

3.2.3 Algorithme d'apprentissage

Ce plan d'expérience sera complété par l'emploi d'un algorithme d'apprentissage, qui permet d'ajouter des points de mesures aux positions de l'espace des paramètres les moins bien évaluées. Pour déterminer ces endroits critiques de manière efficace, on utilise le principe d'apprentissage actif (Cohn, Ghahramani, et Jordan 1996), qui consiste à comparer les prédictions issues de différentes estimations et d'ajouter des points dans les zones où les prédictions sont les plus divergentes. Dans le cas d'estimateurs construits par krigeage dual, il s'agit bien souvent d'ajouter des points dans les zones où la distribution des observations n'est pas assez dense.

Concrètement, construire plusieurs estimateurs par krigeage dual revient simplement à changer le nombre ou la position des points d'observation. À partir des n observations initiales du plan d'expérience, on effectue deux tirages aléatoires sans remise pour en extraire deux sous-ensembles, qui seront chacun à l'origine d'un nouvel estimateur par krigeage dual. Le principe de construction sera résumé à la section suivante. Il faut alors chercher la zone de divergence maximale des deux estimateurs sur une grille de points, qui donnera le point précis à évaluer pour améliorer la précision du modèle global. Toutefois il faut noter que cette méthode de sélection optimale est fondée sur une approche probabiliste, puisque les sous-échantillons sont extraits par tirage aléatoire. Ainsi quelques itérations seront nécessaires pour couvrir avec une certitude suffisante les zones plus incertaines et on peut s'attendre à des fluctuations dans l'amélioration de la précision du modèle.

3.2.4 Interpolation par krigeage dual

Dans cette partie on présente rapidement la philosophie qui conduit aux interpolateurs construits par krigeage dual. Pour plus de détails, on se reportera aux notes de cours de Trochu (2001). Cette théorie, présentée pour la première fois par Krige en 1951, considère que les phénomènes physiques peuvent être correctement approchés en faisant la somme de deux termes: un *terme de dérive*, qui traduit l'influence générale des paramètres sur la réponse et qui est évaluée par la méthode des moindres carrés, et

un *terme correcteur* qui représente les fluctuations autour de la dérive, et permet à l'interpolateur de passer par les points d'observation. Donc chacun des n points d'observation génère un nouveau degré de liberté dans la fonction correctrice. Une fonction mettant en jeu la distance entre les points d'observation et appelée covariance permet de lier la proximité des points d'observations à leur influence mutuelle sur l'estimateur. Selon la forme de covariance choisie, on retrouve comme cas particuliers les interpolations de type splines 1D, 2D ou 3D. La construction de l'estimateur linéaire du krigeage dual génère une fonction de la forme :

$$u(x) = a_0 + \dots + a_p x^p + \sum_{i=1}^N b_i K(|x - x_i|)$$

avec

- N le nombre de points d'observation,
- a_0, \dots, a_p coefficients de la dérive,
- p entier dépendant du type de dérive polynômiale choisie,
- b_i coefficients de la covariance,
- $K(.)$ type de covariance choisie.

Les coefficients de la dérive et de la covariance seront déterminés par résolution d'un système linéaire, de taille $N+p$. Autrement dit le temps de calcul est proportionnel à la taille de l'échantillonnage. Quant à précision de l'estimateur, elle est liée aux modèles de dérive et de covariance choisis ainsi qu'à l'échantillonnage des données. C'est pour ces raisons qu'on fait appel à un plan d'expérience et à l'algorithme d'apprentissage pour améliorer encore la répartition des observations. Des comparaisons sont établies entre les différents types de dérive et de covariance disponibles avec LIBKRIG, la librairie de krigeage en C++ développée à l'École Polytechnique de Montréal (Paludetti et Trochu 1995), afin de dégager quelle combinaison approche au mieux l'allure de la fonction de réponse. Ces comparaisons sont effectuées par le principe de validation croisée, qui mesure l'erreur moyenne d'un estimateur.

3.3 Élaboration des fonctions d'erreur

On suit donc la procédure indiquée à la section précédente pour construire les fonctions correctives. Le même échantillonnage initial est employé pour la constante de raideur et la contrainte maximale de torsion, puisque les paramètres significatifs sur l'écart de modélisation sont rigoureusement les mêmes.

3.3.1 Constante de raideur

Le plan d'expérience initial contient 81 simulations, dans lesquelles on fait varier les paramètres suivants: l'indice C , l'angle de l'hélice α , le rapport e/d_{ext} et le nombre de spires actives N , ainsi que l'angle de tressage $\pm\theta$ du renfort. Or il faut connaître 5 paramètres géométriques pour connaître la structure du ressort. On fixe donc arbitrairement le diamètre d'enroulement D pour chacun et par suite, les grandeurs nécessaires découlent naturellement des paramètres choisis. Si on choisit un diamètre d'enroulement différent, le ressort généré voit ses dimensions varier proportionnellement. Ceci n'a pas d'influence sur l'écart relatif entre les deux modélisations, comme mentionné à la section 3.1.

| dérive\covariance | linéaire | cubique | logarithmique | gaussienne |
|-------------------|----------|---------|---------------|------------|
| constante | 3,55 | 4,38 | 3,55 | 4,44 |
| linéaire | 3,37 | 3,19 | 3,29 | 4,29 |
| quadratique | 3,38 | 3,17 | 3,24 | 4,38 |

Tableau 3.1 : Erreur moyenne (%) de la fonction de correction pour la raideur du ressort (validation croisée effectuée pour différents paramètres de la méthode d'interpolation du krigeage dual)

La comparaison par validation croisée des différentes options du krigeage dual amène à utiliser une dérive quadratique et une covariance cubique (tableau 3.1). A la suite du plan d'expérience, on vient rajouter des points de mesures en utilisant l'algorithme d'apprentissage (annexe 2) et on calcule l'erreur généralisée en comparant les valeurs de l'interpolateur en des points évalués par ailleurs avec SYSPLY et issus d'un plan d'expérience uniforme, afin d'avoir un indicateur fiable sur la précision de l'estimateur. Cette erreur diminue quand on rajoute des points par algorithme

d'apprentissage (cf. figure 3.13), même si cette décroissance n'est pas régulière. Les irrégularités sont dues au petit nombre de points de comparaison choisis et à la démarche probabiliste de l'algorithme d'apprentissage. Elles ne remettent cependant pas en cause la fiabilité de l'estimateur. Après l'ajout de 19 points, on arrive à une erreur inférieure à 1.5% d'écart type, ce qui apparaît suffisant pour corriger de manière efficace la formule analytique de la raideur.

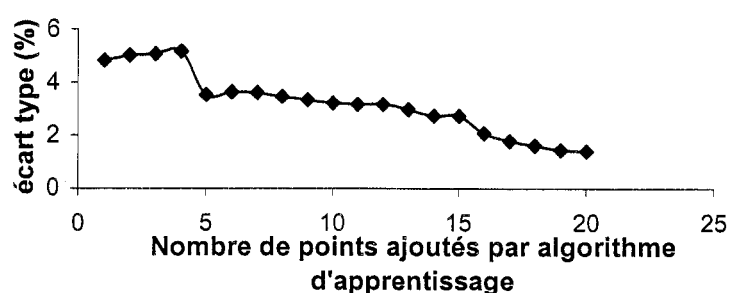


Figure 3.13 : Évolution de l'écart type de l'estimateur de la raideur lors de l'ajout de points de mesures déterminés par l'algorithme d'apprentissage

À présent on détaille qualitativement le comportement de cette fonction de correction.

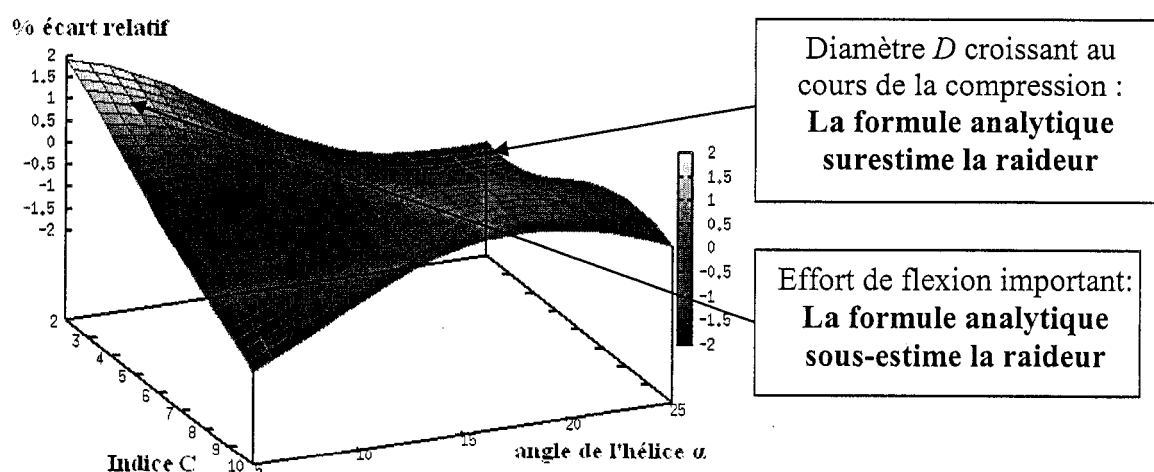


Figure 3.14 : Influence de C et α sur la raideur pour $e/d_{ext}=0.3$, $N=4$ et $\pm\theta=45^\circ$

On constate comme prévu sur la figure 3.14 que les ressorts de grands indices et faibles angles d'hélice sont bien décrits par la formule analytique. L'augmentation de l'angle de l'hélice induit des raideurs réelles plus basses que les raideurs analytiques.

Ceci s'explique par l'augmentation du diamètre d'enroulement au cours de la compression, qui a pour effet d'assouplir le ressort, puisque le paramètre D intervient à travers le terme $1/D^3$ dans la formule analytique (1.6) de la raideur. Une diminution de l'indice entraîne un effet de raidissement supplémentaire de la structure, car celle-ci est alors sollicitée à la fois en flexion et en torsion.

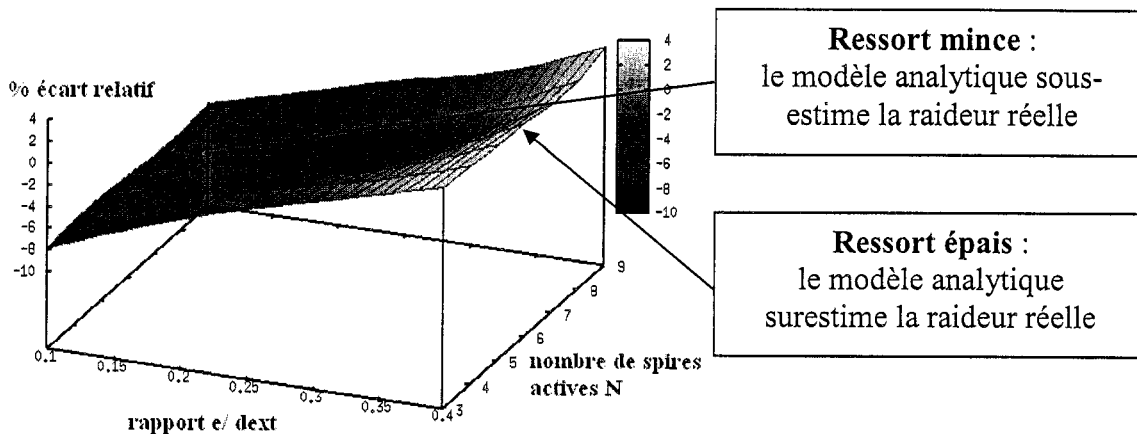


Figure 3.15 : Influence de e/d_{ext} et N sur la raideur pour $C = 5$, $\alpha = 15^\circ$ et $\theta = 45^\circ$

L'influence du rapport d'élancement du fil e/d_{ext} est examinée à la figure 3.15. On constate que la formule théorique s'écarte de la réalité dans le cas d'un ressort à parois minces. Le matériau orthotrope choisi induit un écart d'autant plus grand qu'il sera plus rigide en torsion, donc dans ce cas-ci le maximum est atteint pour un angle de tressage de $\pm\theta = 45^\circ$ (cf. figure 3.16).

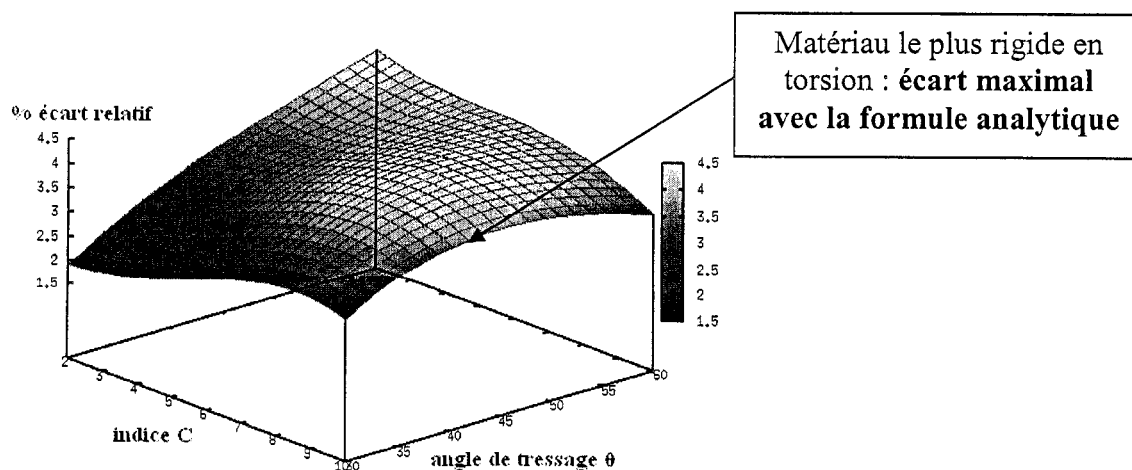


Figure 3.16 : Influence de C et θ sur la raideur pour $e/d_{ext} = 0.4$, $\alpha = 15^\circ$ et $N = 4$

3.3.2 Contrainte maximale de torsion

Là encore, la comparaison des différents modes de krigeage dual par validation croisée (tableau 3.2) amène à utiliser une dérive quadratique et une covariance cubique. Ceci revient à donner une influence quadratique aux paramètres, et à minimiser la courbure de l'interpolateur obtenu par krigeage dual (covariance cubique).

| dérive \ covariance | linéaire | cubique | logarithmique | gaussienne |
|---------------------|----------|-------------|---------------|------------|
| constante | 0,62 | 0,51 | 0,49 | 0,52 |
| linéaire | 0,74 | 0,48 | 0,55 | 0,52 |
| quadratique | 0,71 | 0,47 | 0,58 | 0,45 |

Tableau 3.2 : Erreur moyenne en % de la fonction de correction pour la contrainte maximale (validation croisée effectuée pour différents paramètres de la méthode d'interpolation du krigeage dual)

Partant du même plan d'expériences initial, l'algorithme d'apprentissage suggère l'ajout de différents points d'observation (cf. annexe 3). L'évolution de l'erreur type de l'interpolateur est récapitulée à la figure 3.17.

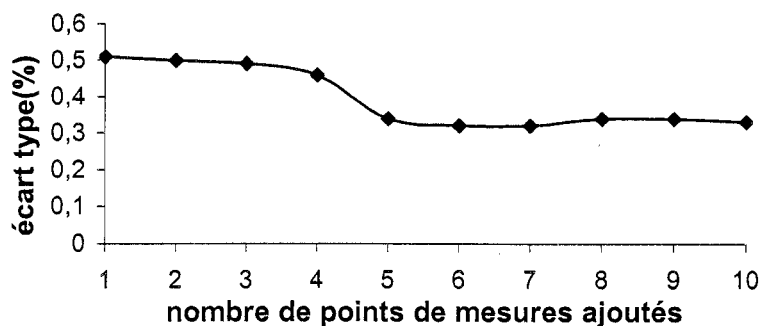


Figure 3.17 : Évolution de l'écart type de l'estimateur de la contrainte maximale lors de l'ajout de points de mesures déterminés par l'algorithme d'apprentissage

Après l'ajout de 10 points, on s'est ainsi assuré d'une fonction de correction précise à 0.4% près, ce qui est suffisant pour les calculs d'optimisation. Cela signifie qu'on peut estimer, à 0.4% près, la contrainte maximale de torsion retournée par SYSPLY pour chaque ressort dans la gamme considérée.

À présent on va détailler qualitativement l'influence des différents paramètres sur l'écart observé entre la formule analytique (1.6) et l'évaluation par éléments finis.

L'importance du rapport e/d_{ext} apparaît clairement sur la figure 3.18 : il s'avère être la principale cause de l'écart entre les contraintes prévues analytiquement et calculées par la méthode des éléments finis. Pour des parois minces (comme dans l'option coque), la formule théorique surestime la contrainte maximale de torsion, alors qu'elle la sous-estime pour des ressorts à parois épaisses.

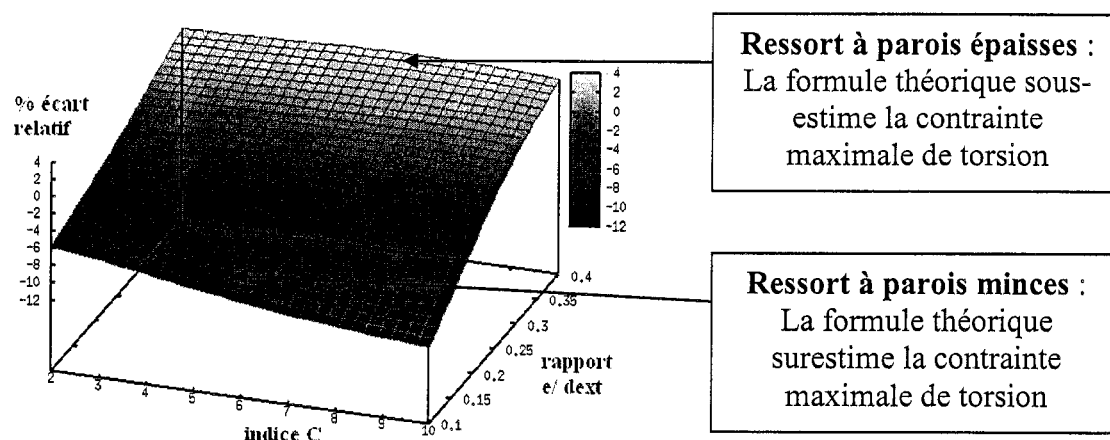


Figure 3.18 : Influence de C et e/d_{ext} sur l'écart relatif dans l'évaluation des contraintes pour $\alpha = 0.4$, $N = 4$ et $\theta = 45^\circ$

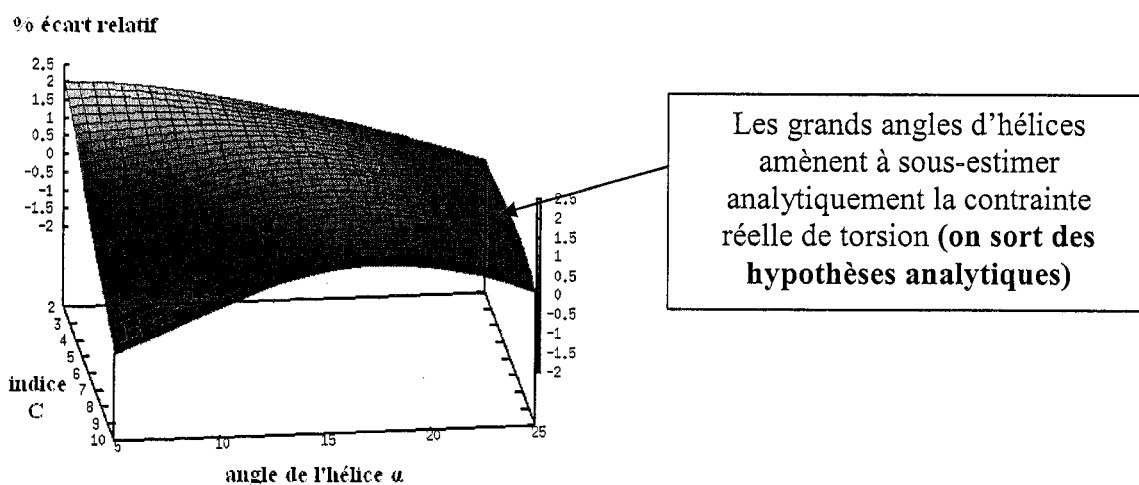


Figure 3.19 : Influence de C et α sur l'écart relatif dans l'évaluation des contraintes pour $e/d_{ext} = 0.3$, $N = 4$ et $\theta = 45^\circ$

On note que globalement la formule analytique sous-estime la contrainte maximale de torsion. Ceci s'explique par la nature orthotrope du matériau sélectionné, ainsi que par le fil tubulaire qui offre moins de surface pour absorber les déformations.

3.4 Réponse au flambage

3.4.1 Présentation du phénomène

Pour toute structure élancée, c'est-à-dire de rapport longueur/diamètre élevé, se pose le problème du flambage, qui se traduit par un brusque fléchissement latéral sous l'effet d'une compression axiale. Suite à des études analytiques menées sur des ressorts hélicoïdaux classiques, c'est-à-dire de fil plein et en matériau isotrope (Haringx 1948), les paramètres significatifs pour ce phénomène sont les suivants :

- le rapport diamètre d'enroulement / longueur libre l_0/D ,
- le rapport module de cisaillement / module de Young G/E ,
- le mode de fixation des ressorts.

On se limite ici aux ressorts à extrémités totalement fixées. Pour des ressorts classiques, on prévoit le flambage pour un rapport déflexion sur longueur libre δ/l_0 excédant :

$$\frac{\delta}{l_0} \geq \frac{\delta_{cr}}{l_0} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{E}{G}\right)} \left[1 - \sqrt{\frac{E-G}{2-G} \left(\frac{\pi D}{l_0}\right)^2} \right] \quad (3.6)$$

Une étude plus complète par la méthode de la matrice de transfert a permis à Becker et Cleghorn (1992) d'ajouter l'influence du nombre de spires N et de l'angle de l'hélice α . En revanche, aucune théorie n'est disponible sur les ressorts creux, *a fortiori* avec des matériaux composites. On note toutefois des études récentes sur le flambage en torsion de tubes en matériau orthotrope (Sofiyev 2003), ainsi que de coques composites (Weaver 2000, Weaver et Dickenson 2003). Cela est particulièrement intéressant car le flambage de torsion est le mode de flambage à surveiller pour un ressort hélicoïdal.

3.4.2 Évaluation par éléments finis

Le calcul de la charge critique de flambage peut être calculée avec le logiciel SYSPLY, selon la procédure suivante (Touboul 2004). Un premier calcul statique linéaire donne la matrice de rigidité K :

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

où

$\{F\}$: Vecteur des forces appliquées.

$[K]$: Matrice de rigidité.

$\{U\}$: Vecteur des déplacement.

Le calcul de flambage est effectué selon la théorie linéaire de stabilité (c'est-à-dire qu'on prend en compte le flambage d'Euler, sans considérer le flambage local). Dans le module de calcul dynamique, on recherche les modes propres réels et on introduit la matrice de rigidité géométrique, ou matrice de flambage M en résolvant l'équation :

$$(K - \lambda M)\phi = 0$$

où

λ : valeur propre,

M : matrice de rigidité géométrique (de flambage),

Φ : vecteurs propres.

Le logiciel SYSPLY évalue la charge critique de flambage P_{cr} comme la plus petite valeur propre déterminée; car le flambage est considéré comme le premier mode de vibration à fréquence de sollicitation très faible. Ce calcul surestime un peu la valeur réelle de la charge critique de flambage, puisque les interactions avec le flambage local ne sont pas prises en compte. On obtient ensuite le rapport déflexion critique sur longueur libre δ_{cr}/l_0 , qui donne la sensibilité de la structure. Plus ce rapport est faible, plus le flambage peut se produire tôt dans la compression. On procède avec un plan d'expérience pour déterminer l'influence des paramètres significatifs. Leurs plages de variations sont les suivantes :

- rapport d'élancement du ressort $1 \leq l_0/D \leq 7,$
- nombre de spires actives $3 \leq N \leq 9,$
- rapport d'épaisseur $0.1 \leq e/d_{ext} \leq 0.4,$
- rapport de débattement (déflexion par spire) $2 \leq p/d_{ext} \leq 8,$

- angle de tressage du matériau $20^\circ \leq \pm\theta \leq 70^\circ$.

Cette fois-ci le manque d'information sur le phénomène amène à utiliser un plan d'expérience uniforme, qui quadrille mieux la gamme des paramètres puisque ceux-ci seront pris avec 6 modalités. On complète ce plan par l'ensemble des bornes du domaine, pour un total de 72 points d'observation. Tel qu'illustré à la figure 3.20 l'algorithme d'apprentissage ajoute 35 valeurs pour abaisser l'erreur de l'approximation à un niveau acceptable, soit moins de 10% d'erreur moyenne). Le krigeage dual construit l'interpolateur qui permet d'évaluer cette grandeur. On évalue l'erreur moyenne de la même façon que pour la fonction corrective de la raideur et des contraintes (section 3.3).

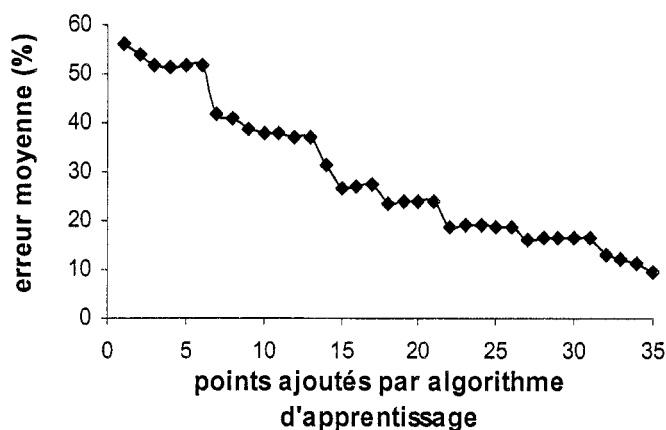


Figure 3.20 : Évolution de l'écart type de la déflexion critique de flambage en fonction du nombre de points rajoutés par algorithme d'apprentissage

3.4.3 Influence des paramètres

On peut visualiser l'influence des différents paramètres lorsque l'interpolateur a été construit. Tel qu'attendu avec la formule de Haringx (3.6) le rapport d'élancement du ressort l_0/D joue un rôle prédominant sur la variable de réponse δ_{cr}/l_0 . Par exemple dans la représentation de paramètres choisis (cf. figure 3.21), un élancement du ressort inférieur à 3 garantit l'absence de flambage de la structure (δ_{cr}/l_0 vaut alors 1). Par ailleurs les autres variables ne peuvent pas être négligées. Ainsi l'on note que pour des angles de tressage $\pm\theta$ de l'ordre de 50° , la sensibilité au flambage d'Euler de la structure est maximale.

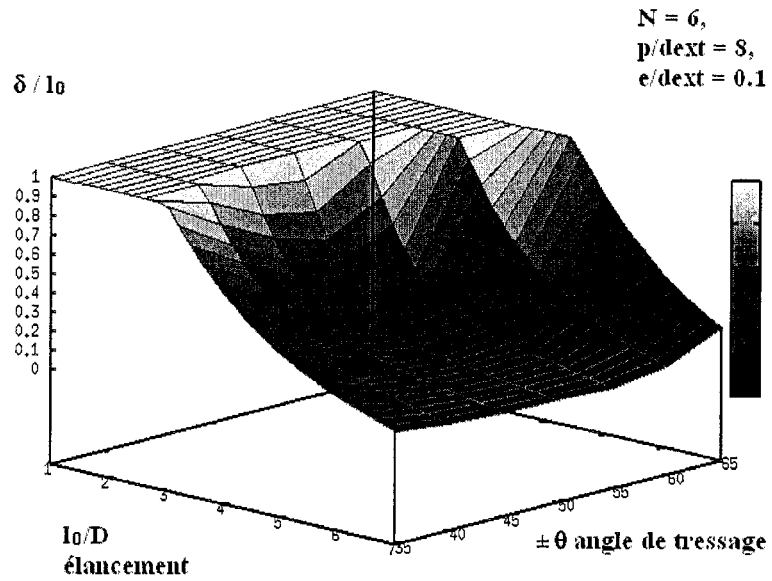


Figure 3.21 : Influence de l'élancement du ressort et de l'angle de tressage sur la sensibilité au flambage d'Euler

Par ailleurs, un rapport d'épaisseur tubulaire e/d_{ext} croissant raidit la structure plus qu'il ne la préserve du flambage. Ceci a donc tendance à augmenter sa sensibilité. D'une façon plus intuitive, un rapport de débattement p/d_{ext} croissant augmente la sensibilité au flambage. Le nombre de spires, à élancement fixé, influe dans le même sens : moins le ressort compte de spires actives et plus son angle d'hélice α est grand, ce qui augmente la sensibilité au flambage (cf. figure 3.22).

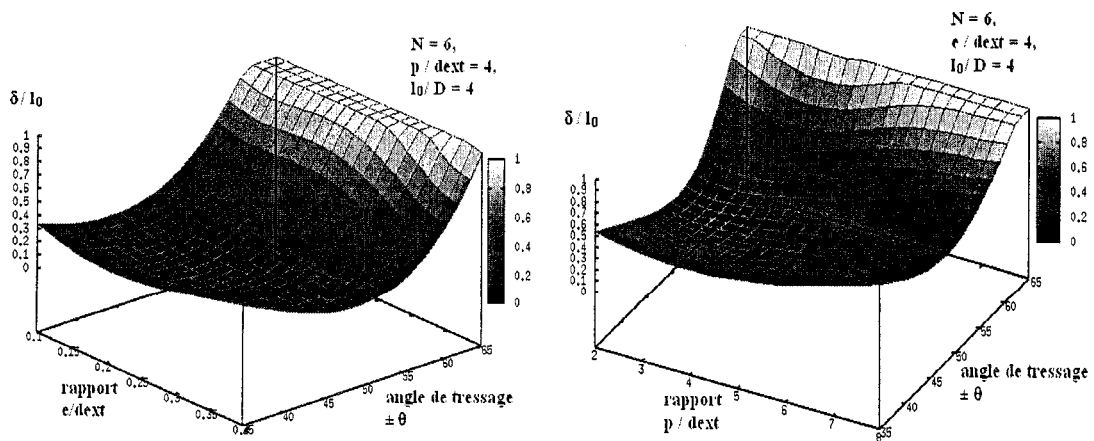


Figure 3.22 : Influence du rapport d'épaisseur e/d_{ext} et de débattement p/d_{ext} sur la sensibilité au flambage d'Euler

De façon générale l'influence couplée des paramètres ne peut être décrite analytiquement en raison de la complexité du problème : la construction d'un estimateur est pertinent afin de quantifier le phénomène de flambage et donc de pouvoir le prendre en considération dans la phase d'optimisation.

3.5 Bilan

Dans ce chapitre, on a présenté les moyens utilisés dans cette étude pour évaluer de façon rapide et précise les performances statiques du ressort, de telle sorte que cette procédure puisse être utilisée dans l'algorithme d'optimisation décrit au chapitre 4. La figure 3.23 récapitule les étapes de calcul pour accéder à ces grandeurs.

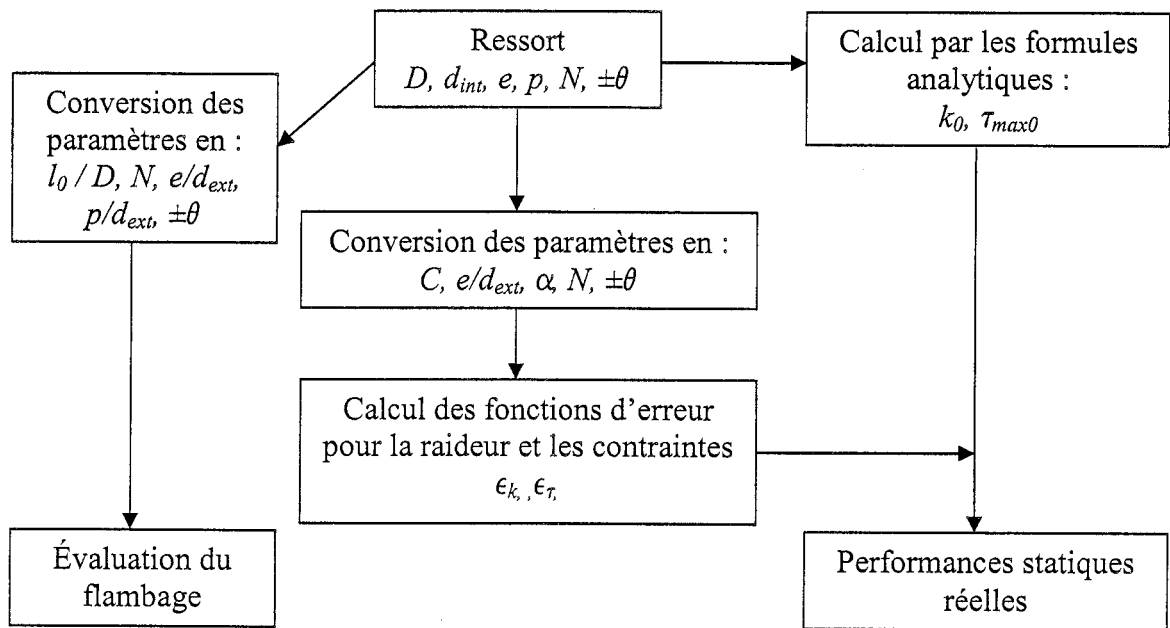


Figure 3.23 : Étapes de calcul pour l'évaluation des fonctions-objectifs

Chapitre 4 : Optimisation multicritères

Dans cette partie on revient tout d'abord sur les méthodes classiques employées pour la conception de ressorts hélicoïdaux. Puis on se penche sur la notion d'optimisation multicritère en conception de structures, et son couplage avec les algorithmes évolutifs en mettant l'emphasis sur les nouvelles perspectives offertes par cette approche. Enfin une revue détaillée des possibilités du logiciel de conception implémenté en C++ sera proposée avec un début d'analyse des avantages et des limitations des matériaux composites dans ce type de structure.

4.1 Méthodes usuelles de conception inverse des ressorts hélicoïdaux

4.1.1 Méthode traditionnelle de calcul des ressorts à partir du diamètre d'enroulement

Suivant les conditions fixées (hauteur, encombrement, raideur souhaitée...), il existe plusieurs méthodologies de calcul pour concevoir des ressorts hélicoïdaux de fil pleins, en matériau isotrope. Dans la plupart des cas on part des données suivantes :

- type de matériau isotrope composant le fil :
 - G module de cisaillement,
 - τ_{ultime} contrainte de torsion maximale admissible par le matériau.
- propriétés souhaitées :
 - P_{max} charge maximale appliquée en service,
 - τ_{max} contrainte de torsion maximale souhaitée en service,
 - D diamètre moyen d'enroulement,
 - k raideur du ressort,
 - c coefficient de sécurité.

On souhaite obtenir avec le logiciel de conception les données manquantes, soit :

- d diamètre du fil,
- N nombre de spires actives,
- l_0 hauteur libre du ressort.

Les étapes du calcul sont synthétisées à la figure 4.1. Ce calcul est fondé sur les formules analytiques de la raideur (1.5) et des contraintes (1.2) pour un ressort de section circulaire pleine. Pour plus de détails, on se reportera à l'annexe 6.

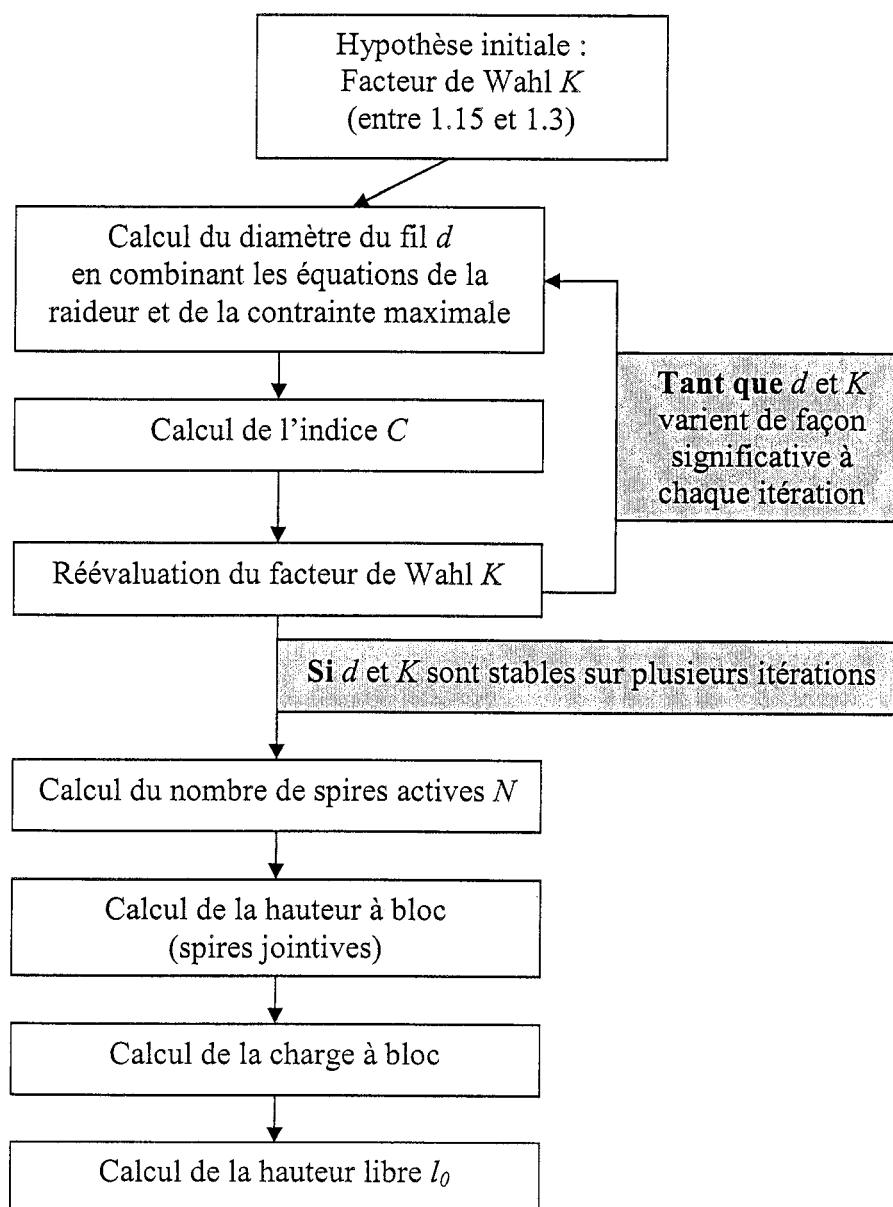


Figure 4.1 : Principe de calcul de conception des ressorts hélicoïdaux classiques

4.1.2 Méthode de calcul des ressorts à partir de l'encombrement

Il existe d'autres méthodes de calcul suivant les données disponibles et le souhait d'optimiser certains paramètres. Le paragraphe suivant présente une méthode dans le cas où l'on ne dispose pas du diamètre d'enroulement, mais seulement des limites intérieures ou extérieures pour loger le ressort. Dans de nombreuses situations, ce n'est pas le diamètre moyen d'enroulement D , mais le diamètre intérieur D_i ou extérieur D_e qui est connu, par l'intermédiaire de l'encombrement maximal utilisable pour la pièce.

Selon une étude de Duchemin (1986), connaissant la contrainte unitaire $\frac{\tau_{\max}}{P_{\max}}$, on évalue

alors un paramètre intermédiaire $\frac{\pi}{8} D_e^2 \frac{\tau_{\max}}{P_{\max}}$ ou $\frac{\pi}{8} D_i^2 \frac{\tau_{\max}}{P_{\max}}$ qui permet de déterminer par

le diagramme présenté à la figure 4.2 l'indice de ressort C et donc les autres paramètres caractéristiques du ressort.

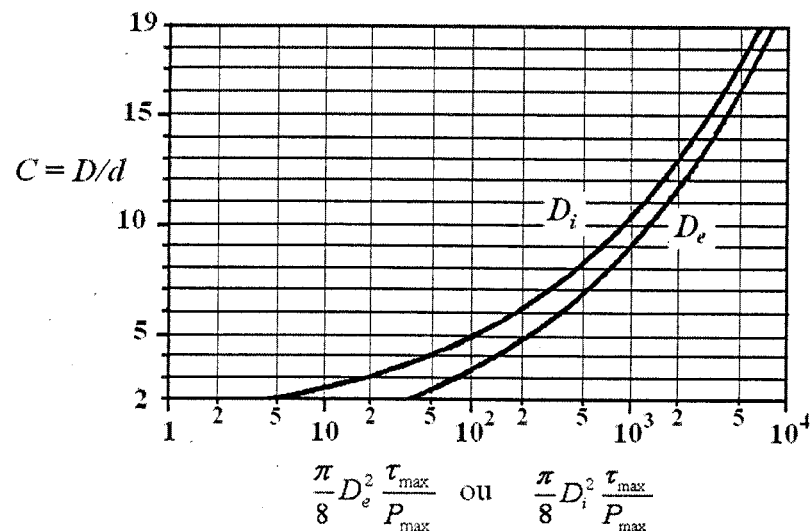


Figure 4.2 : Détermination de C à partir de D_e ou D_i , d'après Duchemin (1986)

4.1.3 Optimisation du poids, du volume ou de la hauteur

Il est possible d'optimiser le ressort suivant le poids, le volume (l'encombrement) ou la hauteur si l'on connaît la charge à bloc P_B , la contrainte à bloc τ_B et la raideur souhaitée k . Pour cela, il faut utiliser le diagramme ci-contre (figure 4.3). Au préalable,

on évalue le paramètre $B = \frac{G}{2kN_i} \sqrt{\frac{P_B}{8\pi\tau_B}}$, puis on obtient la valeur de l'indice en se référant à la courbe désirée :

- courbe \mathcal{L} , pour concevoir un ressort de moindre poids,
- courbe \mathcal{V} , pour un ressort de moindre encombrement,
- courbe \mathcal{H} , pour un ressort de moindre hauteur.

Les autres paramètres se déduisent de l'indice C .

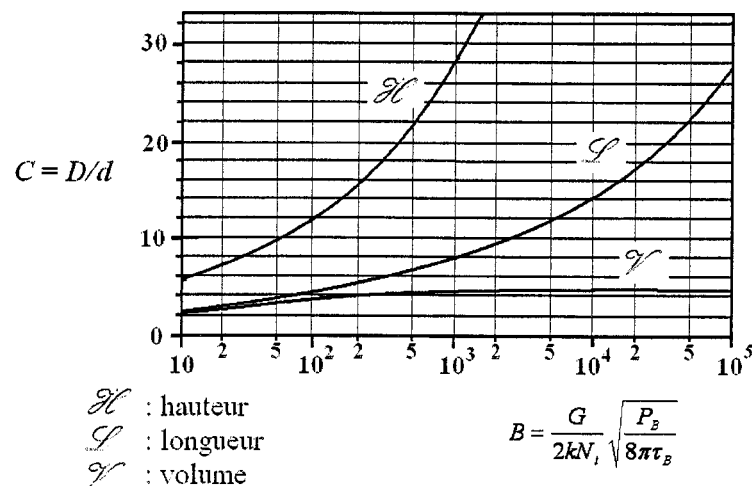


Figure 4.3 : Détermination de l'indice C en fonction du paramètre B et de l'optimisation souhaitée, d'après Duchemin (1986)

Une fois les différents paramètres déterminés, il est capital de vérifier la viabilité du ressort. Les vérifications les plus importantes sont les suivantes :

- La contrainte maximale obtenue en fonctionnement ne doit pas dépasser la valeur maximale souhaitée.
- Il faut s'assurer que sous la charge maximale, le diamètre d'enroulement du ressort ne se soit pas trop élargi pour ne pas rentrer en contact avec les parois de son logement.
- Compte tenu de la charge maximale imposée au ressort et des formes des extrémités, il faut également vérifier sa tenue au flambage.
- Enfin, l'indice du ressort apporte le meilleur fonctionnement quand $5 < C < 12$. Lorsque l'indice est trop petit, les contraintes se répartissent moins bien.

Il est prudent d'éliminer tout risque de déformation accidentelle en s'assurant que les contraintes et déformations du ressort comprimé à bloc ne dépassent pas la limite d'élasticité en torsion du matériau utilisé.

4.1.4 Étude fondamentale pour un ressort hélicoïdal tubulaire ou non

Pour le cas d'un ressort tubulaire, il faut prendre en compte une variable supplémentaire, à savoir le diamètre intérieur d_{int} ou l'épaisseur du matériau e . Gobbi et Mastinu (2001b) ont menés une étude analytique sur les gains de masse potentiels. Considérons comme données de départ la raideur k , la déflexion maximale δ_S (ou la charge maximale P_S), les propriétés du matériau (la résistance en cisaillement τ_{ultime} , le module de cisaillement G_{xy} , la masse volumique ρ). Les paramètres à déterminer sont la masse m , le diamètre d'enroulement D , les diamètres intérieur et extérieur du fil d_{int} et d_{ext} , le nombre de spires N et l'angle de l'hélice α , que l'on suppose faible, permettant d'utiliser l'approximation suivante :

$$\cos \alpha \approx 1$$

Les relations fondamentales employées sont celles de la raideur d'un ressort à fil plein k_p (1.5) et des contraintes maximales d'un ressort à fil plein (1.2), de la raideur d'un ressort à fil creux k_t (1.8) et des contraintes maximales d'un ressort à fil creux (1.6), ainsi que de la déflexion maximale δ_S (4.2) et de la masse d'un ressort à fil plein m_p (4.3) et d'un ressort à fil creux m_t (4.4) :

$$\delta_S = \pi D N \alpha - d_{ext} N \quad (4.1)$$

$$m_p = \frac{\pi^2 \rho d_{ext}^2 D N}{4} \quad (4.2)$$

$$m_t = \frac{\pi^2 \rho (d_{ext}^2 - d_{int}^2) D N}{4} \quad (4.3)$$

On peut alors exprimer D , N et α en fonction des données souhaitées δ_S , k , et des propriétés intrinsèques du matériau, τ_{ultime} , ρ et G ou G_{xy} , ainsi que des diamètres du fil d_{int} et d_{ext} pour le ressort tubulaire. Pour le ressort de fil plein, la masse m_p s'écrit entièrement en fonction de ces différents paramètres sous la forme :

$$m_p = \frac{2\delta_s^2 G \rho k_p}{\tau_{ultime}^2} \quad (4.4)$$

De son côté, la masse du ressort tubulaire m_t s'écrit :

$$m_t = \frac{2d_{ext}^2 \delta_s^2 G_{xy} \rho k_t}{(d_{ext}^2 + d_{int}^2) \tau_{ultime}^2} = \frac{2d_{ext}^2}{d_{ext}^2 + d_{int}^2} * \frac{E^{désirée}}{E_{vol}^{matériau}} \quad (4.5)$$

où l'on peut distinguer 3 types d'influence :

- Le paramètre matériau sous la forme de $E_{vol}^{matériau}$ traduit la capacité du matériau choisi à emmagasiner l'énergie élastique par unité de volume :

$$E_{vol}^{matériau} = \frac{\tau_{ultime}^2}{G_{xy} \rho} \quad (4.6)$$

- Les paramètres géométriques interviennent par l'intermédiaire du rapport $r = \frac{d_{ext}^2}{d_{int}^2 + d_{ext}^2}$.
- Le cahier des charges apparaît sous la forme de l'énergie mécanique désirée pour le ressort $E^{désirée}$ avec :

$$E^{désirée} = \frac{k \delta_s^2}{2} \quad (4.7)$$

Ainsi dans ce type de problème, la masse est directement liée d'une part à la **capacité intrinsèque du matériau** à stocker de l'énergie élastique, d'autre part à l'**exigence du cahier des charges**. Enfin le rapport r représente le gain de poids apporté par un **fil tubulaire** par rapport à un fil plein, à matériau et performances égales:

$$r = \frac{m_t}{m_p} \quad (4.8)$$

Ce gain sera au maximum de 50%, dans le cas limite où $d_{int} \rightarrow d_{ext} \rightarrow +\infty$. Donc plus le ressort hélicoïdal sera à parois minces et de grand diamètre de fil (rapport e/d_{ext} faible) et plus sa masse sera proche de la masse minimale théorique. Mais cette configuration reste idéale : en effet les parois du ressort tubulaire deviendraient infiniment minces, ce qui est physiquement impossible. Dans ce modèle le diamètre d'enroulement tend vers

l'infini, et le nombre de spires vers 0. Si la longueur libre l_0 est une donnée supplémentaire, on peut exprimer m_t , D , d_{ext} et N en fonction de d_{int} et donc résoudre entièrement le problème.

Notons un dernier résultat fondamental: quel que soit la forme du fil (plein ou creux), le rapport optimal d_{ext}/D ne change pas et vaut :

$$\frac{d_{ext}}{D} = \sqrt{\frac{\pi \tau_{ultime} (l_0 - \delta_s)}{f_s G}} \quad (4.9)$$

En appliquant ce résultat théorique aux tubes tressés de verre/époxy, on obtient un indice optimal C (rapport D/d_{ext}) inférieur de 20% à celui d'un ressort en acier.

On peut voir, à la lumière de ces quelques résultats, le danger de résoudre le problème simplement à partir des formules analytiques. Elles montrent que le ressort tubulaire qui minimisera la masse pour une raideur donnée est à paroi minces. Mais deux restrictions majeures se posent à l'application des paramètres optimaux obtenus.

- ✓ D'une part on n'a pas considéré la **stabilité locale** du matériau au sein du fil du ressort. Or, plus les parois du ressort sont minces et plus le phénomène de flambage local des fibres est susceptible de se produire, ce qui abaisse considérablement la résistance du matériau.
- ✓ D'autre part, il faut prendre en compte les **contraintes technologiques de fabrication** : il est en effet délicat de mouler un ressort aux parois minces (moins de 2 mm d'épaisseur) sans menacer l'homogénéité du matériau. Ces imperfections éventuelles affectent les propriétés mécaniques et le comportement en fatigue du ressort, ainsi la solution n'est techniquement pas viable.

En intégrant dans la démarche d'optimisation des fonctions-contraintes afin de vérifier les critères de stabilité du matériau et de flambage, et en fixant des bornes de variation aux paramètres géométriques en fonction des possibilités technologiques, on sera plus à même de répondre aux exigences d'un cahier des charges.

4.2 Algorithmes d'évolution pour les problèmes multicritères

Après s'être penché sur l'état de l'art en optimisation multicritère (voir annexe 7), on porte notre choix sur les méthodes de stratégies évolutives pour plusieurs raisons :

- On cherche une population de points en parallèle, et non un seul point à la fois. Cela permet de trouver en une seule recherche l'ensemble de Pareto (défini à la section 1.3), et préserve donc un temps de calcul précieux.
- Ces stratégies sont « robustes », c'est-à-dire qu'elles peuvent traiter le cas de variables discrètes comme le nombre de spires actives N , tout en assurant une bonne exploration de l'espace des solutions.
- On peut intégrer facilement les fonctions-contraintes désirées dans cette démarche d'optimisation. L'utilisation de ces méthodes reste simple et ne demande pas une connaissance *a priori* du problème.

4.2.1 Rappels sur les algorithmes d'évolution

4.2.1.1 Philosophie et historique des algorithmes d'évolution

Ce type d'algorithme est fondé par analogie avec le principe d'évolution : partant d'une population initiale, on évalue l'aptitude de chaque individu à satisfaire au problème posé par l'intermédiaire d'une fonction d'adaptation (*fitness*). La sélection fait un tri pour transmettre les meilleurs éléments, puis par des opérations de croisement et de mutation, on introduit une nouvelle génération, etc. Plusieurs chercheurs ont développé des versions parallèles de ces méthodes, qui peuvent être regroupées en trois branches distinctes. Rechenberg et alii introduisirent en 1960 les « stratégies d'évolution » (*Evolutionstrategy*). Simultanément, Fogel, Owens et Walsh (1966) créèrent la programmation évolutionniste et finalement, Holland (1975) mit en avant le concept d'algorithme génétique.

4.2.1.2 Différents algorithmes d'évolution

Ces trois types d'algorithmes diffèrent en ce qui a trait aux opérateurs de base des algorithmes d'évolution, à savoir la sélection, le croisement et la mutation :

- Un **algorithme génétique** utilise les trois opérateurs de base. Le croisement est le garant de la diversification du bassin génétique (donc de l'apparition de nouvelles solutions). Les individus sont codés en langage binaire : il faut un décodage pour évaluer la fonction d'adaptation.
- Dans les **stratégies d'évolution**, qui utilisent directement les variables réelles, la mutation constitue l'opérateur prépondérant pour assurer la diversité de la population, comme le postule la théorie de Darwin.
- Finalement, dans la **programmation évolutionniste**, l'opérateur de croisement n'existe pas. La mutation assure seule l'exploration de l'espace de recherche du problème. Ceci procède davantage de la philosophie des stratégies d'évolution que de celle des algorithmes génétiques.

4.2.2 Opérateurs de base

4.2.2.1 Opérateurs de sélection

La sélection consiste à prendre les individus les plus performants pour les faire participer à l'étape de croisement ou directement à la génération suivante. Cette sélection se base sur la fonction d'adaptation. On peut définir un critère de sélection dans le cas d'un *modèle déterministe* ou une probabilité de sélection dans le cas d'un *modèle stochastique*. Parmi les modèles stochastiques, la méthode la plus fréquemment utilisée est celle de la **roulette biaisée**. Suivant ce modèle, chaque individu a une probabilité d'être sélectionné proportionnelle à sa fonction d'adaptation par rapport à la somme de celles de tous les individus.

Une autre approche utilisée est celle du **tournoi**. Cette méthode consiste à choisir le meilleur individu parmi un échantillon de taille τ . Le paramètre qui influence la probabilité du choix d'un individu est la taille du tournoi. En effet, cet individu sera sélectionné si et seulement si tous les autres individus participant au tournoi sont moins performants. Par conséquent, plus la taille du tournoi est grande, moins un individu donné aura de chances d'être sélectionné.

La **sélection par le rang** est une approche fréquente, spécialement pour les problèmes multicritères. Cela revient à diviser les différents individus en ensemble de Pareto successifs (figure 4.4). Les individus non dominés au sens de Pareto sont classés dans le premier ensemble, puis ils sont retirés de la population. Les individus suivants non dominés sont classés dans le deuxième ensemble de Pareto, etc. La valeur de la fonction d'adaptation est alors attribuée selon l'appartenance des individus aux différents ensembles de Pareto.

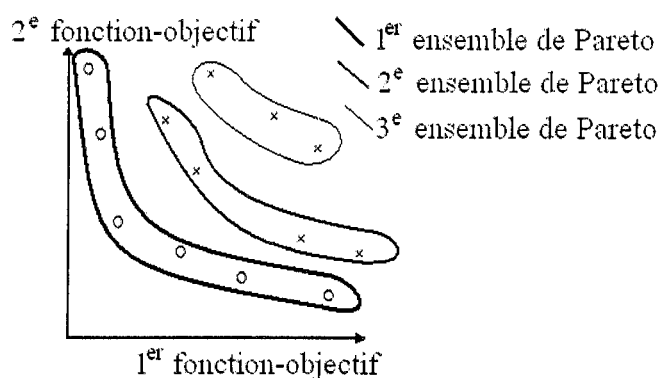


Figure 4.4 : Sélection par le rang avec le principe de non-domination de Pareto

Une autre notion importante est celle d'**élitisme**. Utilisé indépendamment de la méthode de sélection choisie, le modèle élitiste consiste à conserver automatiquement à la génération suivante les meilleurs individus. Cela évite de détruire des solutions potentiellement optimales trouvées tôt dans le processus d'optimisation. Toutefois, conserver trop d'individus peut mener à la convergence vers un optimum local. Il est donc impératif de toujours renouveler une majeure partie de la population à chaque génération.

Il est également possible d'adopter un modèle déterministe pour la sélection, tels que les modèles (μ, λ) et $(\mu + \lambda)$ dans le cadre des stratégies d'évolution. Le modèle (μ, λ) revient à sélectionner pour le croisement les μ meilleurs individus parmi les λ descendants créés. Le modèle $(\mu + \lambda)$ consiste à choisir les μ meilleurs individus parmi l'ensemble regroupant les parents et les enfants de la génération courante. Ce modèle est donc élitiste, contrairement au modèle (μ, λ) .

4.2.2.2 Opérateurs de croisement

Le rôle du croisement est de combiner les caractéristiques de deux individus d'une génération en vue de les retenir et de les transmettre à leurs descendants. Cet opérateur est lié à la façon de représenter les individus. La représentation en nombres réels entraîne une grande flexibilité pour explorer de nouvelles régions au niveau du croisement. En effet, l'utilisation d'une combinaison linéaire des génotypes des deux parents permet un parcours continu de l'espace situé entre les deux points, contrairement à une représentation binaire. La méthode la plus utilisée est celle de la recombinaison géométrique, qui prend la forme d'une combinaison linéaire des génotypes des parents :

$$g_i = \alpha_i g_i^1 + (1 - \alpha_i) g_i^2 \quad i = 1 \dots N \quad (4.10)$$

où g_i représente le génotype de l'enfant, g_i^1 celui du premier parent, g_i^2 celui du deuxième parent et N , le nombre d'individus de la nouvelle génération. On borne en principe la valeur du facteur α à l'intervalle $[0, 1]$ pour favoriser l'exploration de la zone comprise entre les deux parents, mais au détriment de la diversité de la population.

4.2.2.3 Opérateurs de mutation

Dans le cadre de la programmation évolutionniste, la mutation est primordiale puisqu'il s'agit de l'unique opérateur à partir duquel l'espace du problème sera exploré (le croisement est inexistant). Elle concerne une fraction de la population, définie par le taux de mutation τ_{mut} . Dans le cas d'une représentation en nombres réels, la mutation prendra souvent la forme d'un vecteur de perturbation gaussien :

$$g' = g + N(0, \sigma^2) \quad (4.11)$$

où $N(0, \sigma^2)$ est une variable aléatoire normale centrée de variance σ^2 .

4.2.2.4 Partage des ressources

Pour favoriser une exploration la plus complète possible de l'espace d'optimisation, deux individus situés trop près l'un de l'autre doivent être défavorisés. C'est ici qu'intervient la notion de *partage des ressources*, qui attribue une certaine

pénalité à la fonction d'adaptation d'un individu si d'autres individus sont présents à l'intérieur d'un certain seuil de distance σ_{share} . La fonction de partage $sh(x_i, x_j)$ s'écrit :

$$sh(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d_{ij}}{\sigma_{share}} \right)^\alpha, & si \quad d_{ij} \leq \sigma_{share} \\ 0, & si \quad d_{ij} > \sigma_{share} \end{cases} \quad (4.12)$$

où d_{ij} représente la distance séparant x_i et x_j et α est un paramètre influençant l'amplitude de la pénalité. La fonction d'adaptation d'un individu s'écrit alors :

$$\Phi(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\mu} sh(x_i, x_j)} \quad (4.13)$$

où $f(x_i)$ est la fonction d'adaptation originale de l'individu. Le concept de partage des ressources permet alors d'explorer simultanément différents maximums de la fonction, autour desquels seront répartis un certain nombre d'individus.

4.2.3 Algorithme NSGA II

On peut dégager deux buts fondamentaux que doit atteindre l'algorithme d'optimisation multicritères :

- aboutir en une seule recherche au front de Pareto,
- maintenir la diversité des individus dans ce front de Pareto.

Plusieurs algorithmes parviennent à ces résultats, mais le NSGA (*Non-dominated Sorted Genetic Algorithm*) proposé par Deb et Srinivas (1994) s'avère particulièrement performant. Il divise la population en fronts de Pareto, qui affectent la probabilité de sélection par l'intermédiaire de la fonction d'adaptation. En outre, 2 individus trop proches dans un même ensemble de non-domination sont pénalisés par la notion de partage des ressources, pour répartir équitablement les individus sur tout le front. La sélection entre plusieurs individus s'établit de la façon suivante : on prend l'individu appartenant au front de Pareto le plus bas. S'il y a égalité entre les deux, alors on examine la fonction de partage des ressources pour sélectionner le plus isolé.

En raison d'un coût de calcul élevé, de son approche non élitiste, et de la difficulté de choisir la distance de partage des ressources σ_{share} , cet algorithme a donné le

jour à une deuxième version plus évoluée : l'algorithme NSGA-II qui utilise une approche élitiste pour améliorer la vitesse de convergence (figure 4.5).

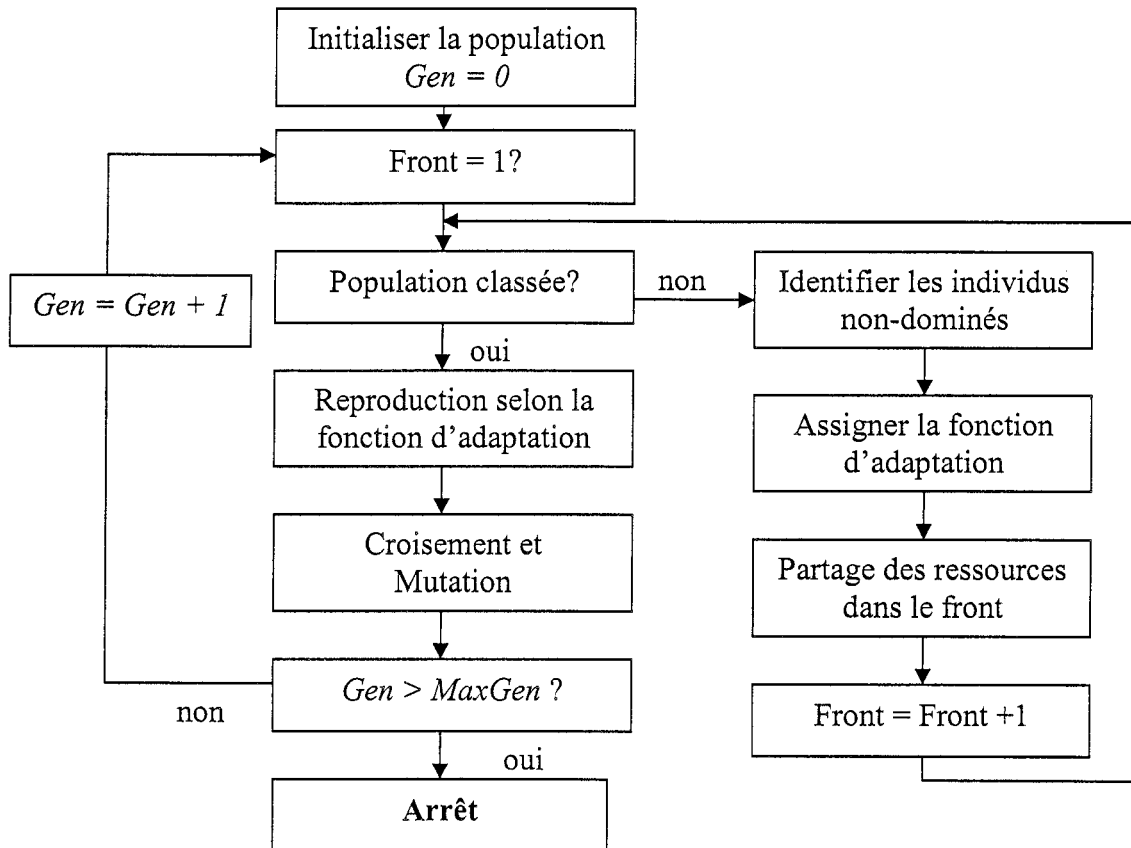


Figure 4.5 : Schéma de fonctionnement de l'algorithme NSGA-II

La complexité du tri de la population par non-domination a été abaissée de $O(mN^3)$ à $O(mN^2)$, où m est le nombre de fonctions-objectifs et N la taille de la population. La sélection s'effectue par tournoi stochastique avec l'ensemble {parents + descendants}, ce qui assure l'élitisme de la procédure. Enfin le paramètre σ_{share} est maintenant dynamiquement relié à la densité de population dans chacun des fronts Pareto, ce qui lui confère une grande efficacité pour diversifier la population. Cet algorithme s'est avéré plus rapide pour converger que les autres stratégies évolutionnistes fondées sur la non-domination, et il assure une meilleure répartition sur le front de Pareto (Deb, Agrawal, Pratap et Meyarivan 2000).

4.3 Fonctionnalité de l'algorithme

On s'appuie donc sur la démarche détaillée au chapitre 4.2.3 pour construire l'algorithme d'optimisation multicritère capable en un seul calcul de donner l'ensemble du front de Pareto, sans aucune connaissance préalable du problème. La librairie EO (*Evolving Objects*) disponible en langage C++ (Merelo, Keijzer et Schoenauer 2004) fournit les outils informatiques et propose une sortie graphique sous GNUPlot pour contrôler l'évolution de la population génération par génération.

4.3.1 Paramètres définissant les individus

Pour définir un ressort on prend les paramètres géométriques suivants (dans tous les cas le matériau est composite en verre/époxy, à 60 % de fibres de verre) :

- D diamètre d'enroulement moyen (en mm),
- d_{int} diamètre intérieur du fil du ressort (en mm),
- e épaisseur du matériau (en mm),
- p pas du ressort (en mm),
- N nombre de spires actives.

Concernant le matériau composite, on doit faire la distinction entre les cas suivants :

- ❖ Si on considère **un seul angle de tressage** disponible pour chaque pli, il suffit de donner la grandeur $\pm\theta$ pour définir entièrement le matériau.
- ❖ Si on part de plis tressés initialement sur le même mandrin (**tressage géométrique**), la formule (4.14) permet de déduire l'angle $\pm\theta_i$ de chaque pli :

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_0} = \frac{d_i}{d_0} \quad (4.14)$$

avec θ_0 angle de tressage du pli intérieur,
 d_0 diamètre intérieur du pli intérieur,
 θ_i angle de tressage du $i^{\text{ème}}$ pli intérieur après le premier,
 d_i diamètre intérieur du $i^{\text{ème}}$ pli intérieur après le premier.

Donc la seule donnée de l'angle initial θ_0 suffit, avec la connaissance de l'épaisseur de chaque pli (e représente dans ce cas-là l'épaisseur d'un pli tressé), à déduire les angles de tressage des autres plis. Une autre variable se rajoute alors, le nombre de plis n .

- ❖ Dans le cas de plis tressés disponibles dans le commerce (**tressage de référence**), on prend comme référence un pli tressé à $\pm\theta_{réf} = 45^\circ$ sur un mandrin de 1 pouce ($d_{réf} = 25.4 \text{ mm}$) de diamètre. Dans ce cas seuls d_{int} et e suffisent à définir les angles de tressage successifs.

On aurait pu prendre différents paramètres géométriques tels que la longueur libre l_0 , l'angle de l'hélice α ou l'indice C pour définir le ressort. Ces paramètres restent néanmoins disponibles dans les fonctions-contraintes pour définir des bornes de variations qui s'appliqueront à tous les ressorts considérés.

4.3.2 Fonctions-objectifs disponibles

Tel que mentionné au chapitre 3, cet algorithme est capable de prendre comme fonctions-objectifs à optimiser plusieurs performances statiques du ressort:

- ✓ la constante de raideur k ,
- ✓ la masse m ,
- ✓ la contrainte maximale τ_{xy} sous un chargement donné,
- ✓ la charge maximale admissible P_{max} ,
- ✓ la déflexion admissible δ_{max} ,
- ✓ la fréquence de résonance f_R ,
- ✓ l'énergie élastique que le ressort peut stocker U_{max} .

On peut donc choisir de maximiser ou minimiser chacune de ces grandeurs, simultanément. Néanmoins il est conseillé de ne pas dépasser 3 fonctions-objectifs, car le temps de calcul est alors élevé et la taille de la population requise est importante pour arriver à un front de Pareto suffisamment dense (dans le cas d'une optimisation à 3 objectifs, il s'agit d'une surface).

4.3.3 Fonctions-contraintes disponibles

Tout d'abord il est possible de fixer l'espace de variations des paramètres géométriques et des caractéristiques (angles de tressage, nombre de plis) du matériau. On peut également les fixer à un niveau donné, mais aussi spécifier des dimensions maximale ou minimales à respecter (hauteur totale, largeur totale, indice C , angle d'hélice α).

Les contraintes peuvent également porter sur des critères à ne pas dépasser, comme par exemple une raideur maximale ou une déflexion minimale. Si la charge de fonctionnement est connue, on va également vérifier qu'elle n'excède pas la charge critique de flambage ($P < P_{cr}$) et qu'elle ne provoque pas la rupture du matériau (critère de Tsai-Wu), lorsque la compression du ressort est maximale (ressort à bloc). Le nombre de contraintes est illimité, mais il influence directement la vitesse de convergence de l'algorithme.

4.3.4 Opérateurs de l'algorithme

L'algorithme mis au point inclue les opérateurs suivants :

- **L'initialisation** est aléatoire, de par le grand nombre de variables (au moins six) nécessaires pour définir un individu. On peut bloquer n'importe quelle variable à une valeur fixée. Le nombre de spires N n'accepte que des valeurs entières.
- **La sélection** reprend le principe de l'algorithme NSGA-II avec une fonction d'adaptation qui dépend du rang Pareto de l'individu et de la fonction de partage des ressources. En outre, si une ou plusieurs contraintes est violée la fonction d'adaptation est pénalisée, et ce d'autant plus que la violation est importante. On a le choix entre le tournoi stochastique ou la roulette biaisée.
- **La mutation** applique à un individu un vecteur de perturbation gaussien, avec une probabilité égale à τ_{mut} (paramètre réglable entre 0 et 1). Il est toutefois conseillé de le prendre proche de $1/d$, avec d dimension du problème.
- Il n'y a **pas d'opérateur de croisement**. La diversification repose entièrement sur l'étape de mutation.

On peut également jouer sur la taille de la population et le nombre de générations. Après un certain nombre de générations, on n'observe plus d'évolution notable du front de Pareto sur la sortie graphique GNUPlot. Ceci permet d'établir la convergence de l'algorithme. À l'inverse, si on observe encore des fluctuations notables, on peut relancer le calcul à partir de la population actuelle.

4.3.5 Édition des résultats

En sortie on édite plusieurs fichiers concernant la population finale obtenue :

- le fichier « resultats_optimisation.dat » récapitule le problème posé, soit le nombre et la nature des fonctions-objectifs et des contraintes, les caractéristiques de l'algorithme (nombre d'individus, de générations, taux de mutation), la gamme des paramètres ainsi que la description du front de Pareto obtenu,
- le fichier « resultats_parametres.dat » donne simplement la valeur des variables définissant chaque individu de la population finale,
- le fichier « resultats_FO.dat » précise les fonctions-objectifs du front Pareto,
- le fichier « toutes_performances.dat » précise l'ensemble des performances statiques de chaque individu (masse, raideur, contrainte induite, charge et déflexion admissible, charge critique de flambage, énergie interne, critère de Tsai-Wu à la compression maximale, numéro du pli critique).

Dans le cas où on intègre plusieurs plis pour fabriquer le ressort, d'autres informations permettent de caractériser entièrement chaque ressort :

- Le fichier « population.dat » précise le nombre de plis, l'épaisseur et l'angle de tressage de chacun d'entre eux.
- Le fichier « chaque_pli.dat » ajoute en plus le niveau de contrainte dans chaque pli sous un chargement donné et le numéro du pli dans lequel s'initiera la rupture d'après le critère de Tsai-Wu.

4.4 Résultats préliminaires de l'algorithme

4.4.1 Sans fonction-conainte

On lance une optimisation avec la gamme des paramètres par défaut (tableau 4.1):

| bornes | Diamètre d'enroulement D (mm) | Diamètre du fil d_{int} (mm) | Épaisseur du stratifié e (mm) | Pas de l'hélice p (mm) | Nombre de spires actives N | Angle de tressage $\pm\theta$ (degrés) |
|---------|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|------------------------------|--|
| minimum | 60 | 10 | 2 | 50 | 3 | 20 |
| maximum | 200 | 25 | 10 | 150 | 9 | 70 |

Tableau 4.1 : Gamme de variation des paramètres par défaut

La convergence de l'algorithme pour une optimisation à deux objectifs conflictuels (maximiser la raideur et minimiser la masse) est rapide et donne la forme attendue de la solution, qui dépend juste de deux paramètres : le diamètre intérieur d_{int} et l'épaisseur e . L'effet de la correction de la raideur est très léger dans ce cas-là (figure 4.6).

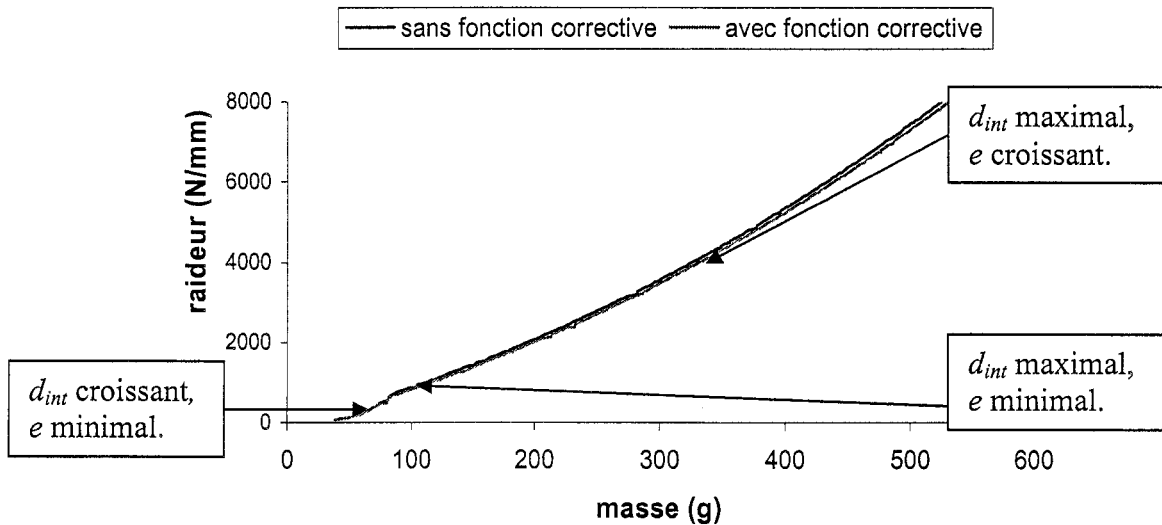


Figure 4.6 : Maximisation de la raideur et minimisation de la masse, sans contraintes, pour un seul angle de tressage

Le front Pareto est différent selon le mode de tressage choisi, comme le montre la figure 4.7. On s'assure de traiter de ressorts dans les mêmes bornes de variations géométriques en limitant l'épaisseur des stratifiés. On fixe l'épaisseur d'un pli à $e = 0.5$ mm, ce qui explique l'allure irrégulière du front pour les tressages géométrique et de référence, puisque le nombre de plis n est un entier. On note que le front de Pareto le

plus intéressant est obtenu pour un seul angle de tressage, même si le tressage géométrique, plus représentatif de la réalité, offre quasiment le même compromis {masse-raideur}. En revanche en se limitant au tressage de référence, la gamme de ressort et donc de performances est considérablement plus réduite, puisque l'angle de tressage n'est plus une variable indépendante : on ne peut plus optimiser la structure du matériau librement.

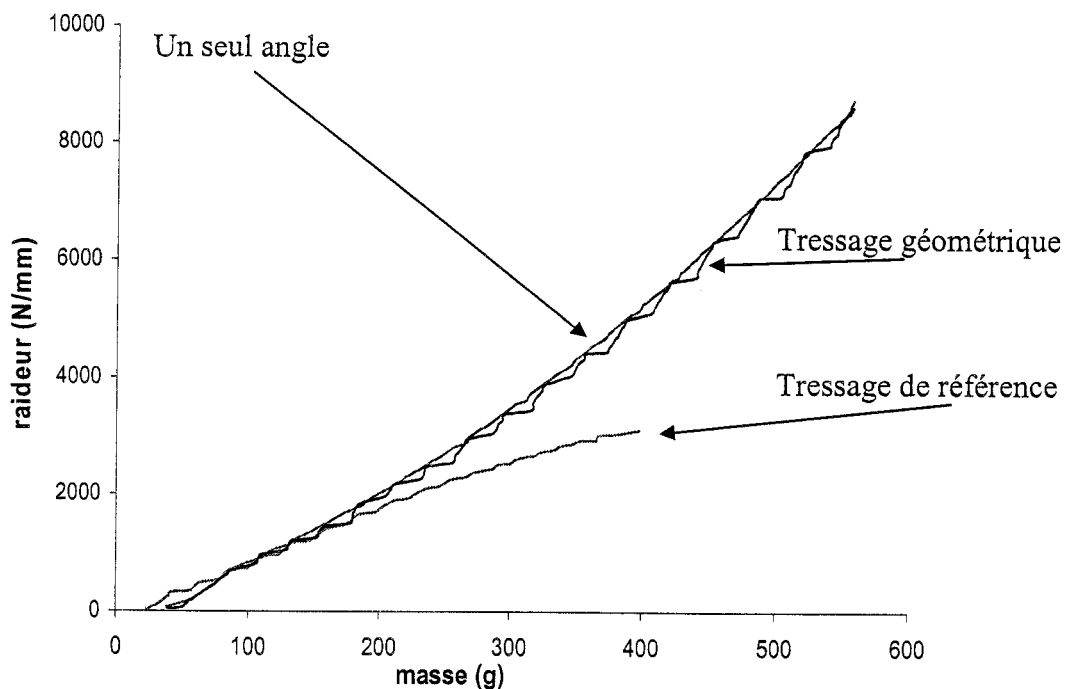


Figure 4.7 : Comparaison des fronts de Pareto pour différents modes de tressage

On vérifie par la suite que les différentes fonctions-objectifs qui intéressent généralement le concepteur sont en conflit : minimiser la masse ou la contrainte induite dans le matériau, maximiser la raideur, la charge admissible, la déflexion admissible ou bien encore l'énergie élastique. Il suffira de prendre deux objectifs parmi ceux-ci pour que le logiciel retourne un front de Pareto optimal, représentant le meilleur « compromis » pour ces deux objectifs, en respectant les contraintes et la gamme de paramètres souhaitée.

4.4.2 Avec le respect du critère de rupture pour la charge à bloc

Cette première étude reste inapplicable en pratique puisqu'elle ne prend pas en compte les critères de stabilité du matériau. Plaçons-nous à présent dans le cas le plus défavorable : le ressort doit respecter le critère de Tsai-Wu à la déflexion à bloc, c'est-à-dire quand les spires sont en contact les unes avec les autres. Les ressorts composant le front optimal seront, à masses égales, beaucoup moins raides, puisque la contrainte opérée modifie essentiellement le diamètre d'enroulement D . On note dans ce cas-là que l'emploi des fonctions de corrections donne un écart bien plus significatif, de l'ordre de 20% en moyenne (figure 4.8). Cela paraît logique, puisque non seulement la correction pour la raideur joue plusieurs fois (elle intervient aussi pour le critère de Tsai-Wu), mais la correction pour les contraintes entre également en jeu. Ceci justifie donc le raffinement des modèles de raideur et de contrainte employés.

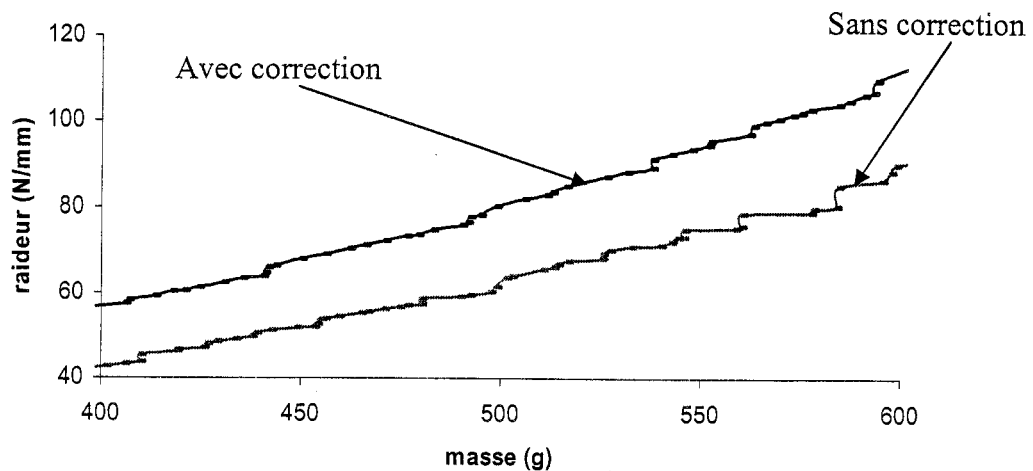


Figure 4.8 : Maximisation de la raideur et minimisation de la masse avec le respect du critère de Tsai-Wu à la charge à bloc du ressort, pour un seul angle de tressage

Voyons à présent l'influence des différents modes de tressage dans ce cas précis. La figure 4.9 récapitule les différents fronts de Pareto obtenus. Outre le fait que le mode de tressage de référence ne couvre qu'une gamme incomplète de performance, il est intéressant de noter que le mode de tressage géométrique, c'est-à-dire avec un stratifié dont les constantes mécaniques ne sont pas homogènes, donne une surface de compromis plus performante qu'un stratifié homogène (un seul angle de tressage). Ceci

s'explique par la répartition des contraintes, qui peut être plus harmonieusement distribuée dans le stratifié hétérogène, et ainsi augmenter la charge maximale admissible par le ressort. Une analyse plus détaillée des stratifiés optimaux dans le cas du tressage géométrique montre que le pli critique (qui initiera la rupture) se situe en moyenne au centre de la séquence d'empilement, alors que pour un même angle de tressage on trouve que le pli critique est le pli extérieur, compte tenu du fait que les contraintes de torsion exercées en ce point sont maximales. L'épaisseur d'un pli, fixée à $e = 0.5 \text{ mm}$, cause les irrégularités du front Pareto puisque le nombre de plis n est nécessairement entier.

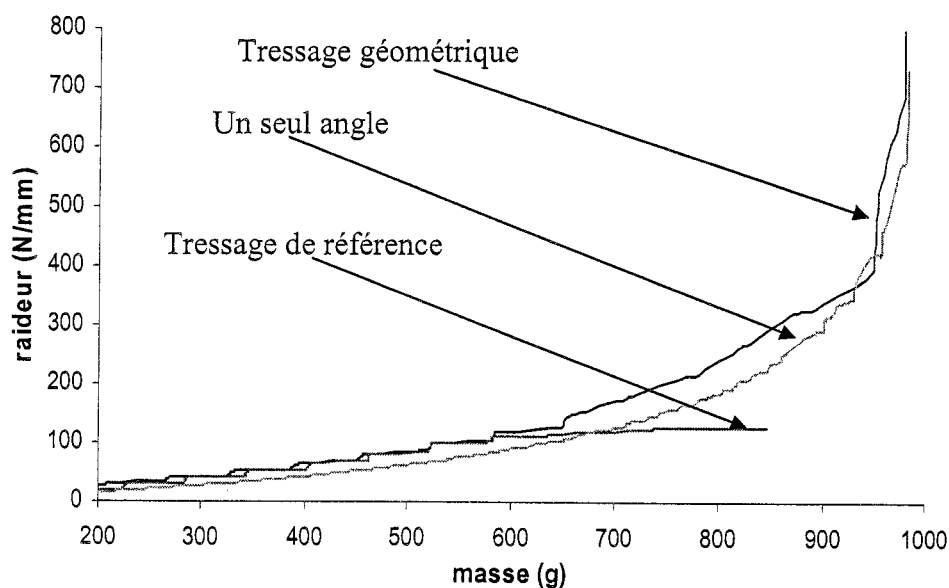


Figure 4.9 : Fronts de Pareto pour différents modes de tressage, avec le respect du critère de Tsai-Wu à la charge à bloc du ressort

4.4.3 Étude à partir d'un cahier des charges

On se fixe un problème susceptible de faire l'objet d'un cahier des charges. On souhaite concevoir un ressort hélicoïdal de hauteur libre l_0 inférieure à 300 mm mais de déflection admissible supérieure à 200 mm . On veut s'assurer de la stabilité globale du matériau et de la bonne tenue au flambage au contact spire-spire, et aussi que la fréquence de résonance f_R excède 50 Hz . On cherche donc le ressort de masse minimale et de raideur maximale. Le tableau 4.2 indique la gamme des paramètres choisis.

| bornes | Diamètre d'enroulement D (mm) | Diamètre du fil d_{int} (mm) | Épaisseur du stratifié e (mm) | Pas de l'hélice p (mm) | Nombre de spires actives N | Angle de tressage θ (degrés) |
|---------|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| minimum | 60 | 2 | 1 | 30 | 2 | 20 |
| maximum | 120 | 16 | 5 | 90 | 9 | 45 |

Tableau 4.2 : Gamme des paramètres pour résoudre le cahier des charges

À la lumière de la figure 4.10 on remarque donc que le cas idéal d'un seul angle de tressage pour le stratifié ne couvre pas le même domaine qu'un stratifié de plis d'épaisseur 0.5 mm à plusieurs angles de tressage. On n'a pu obtenir que quelques solutions admissibles à partir de stratifiés de tressage de référence, insuffisamment nombreux pour constituer un front proprement dit, car la gamme couverte de ressort est trop restrictive. Voici dans quelle gamme de paramètres se situent les ressorts optimaux :

- D de 110 à 120 mm,
- d_{int} de 2 à 5 mm,
- e 2 mm (tressage géométrique, soit 4 plis tressés), 1.5 mm (un seul angle)
- p de 30 à 33 mm,
- N de 8 à 9 spires actives,
- θ proche de 20° (tressage géométrique), fixé à 45° (un seul angle).

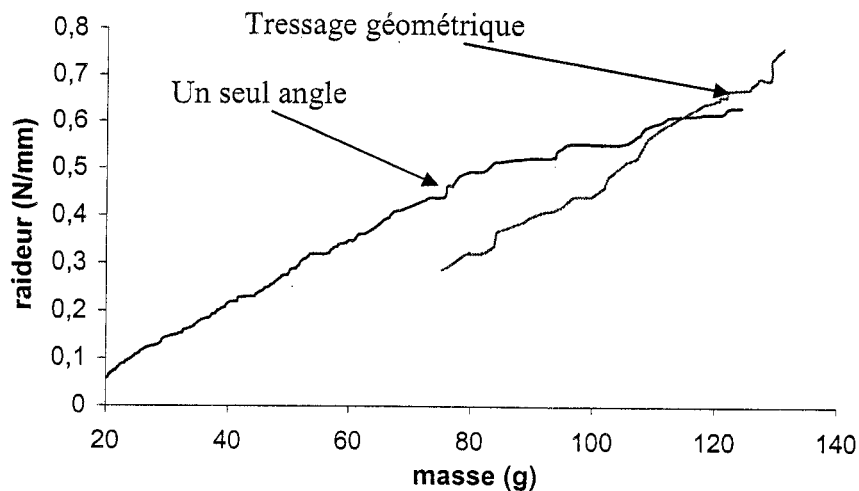


Figure 4.10 : Fronts de Pareto obtenus d'après le cahier des charges, pour 2 modes de tressage

Finalement, en moins de 500 générations, l'algorithme employé a dégagé le front de Pareto à partir d'un cahier des charges contraignant, typique des exigences industrielles. Le temps maximal de ce processus est de **5 minutes** pour chaque mode de tressage, et le **contrôle** exercé par l'utilisateur selon l'**évolution graphique** de la population permet de **s'assurer de la convergence finale**. Il est conseillé de procéder à une **phase d'exploration**, incitant la population à une diversité maximale avec des taux de mutation élevés ($\tau_{mut} > 0.5$), puis à favoriser davantage **l'exploitation** ($\tau_{mut} < 0.5$) quand on pense que l'ensemble du domaine de Pareto est détecté. Par ce biais on minimise le temps de calcul tout en obtenant les fronts de Pareto complets.

4.5 Comparaison des matériaux

On peut également implémenter par la même méthode un logiciel de conception inverse utilisant l'acier pour matériau. Les performances statiques du ressort sont évaluées par la théorie développée au chapitre 1, et on opère alors une comparaison des performances des ressorts formés de différents matériaux, composites ou non.

4.5.1 Intérêt de l'utilisation des composites

Le tableau 4.3 compare les propriétés mécaniques de l'acier utilisé à celles du composite Verre/Époxy utilisé.

| Matériau | Module de Young E (GPa) | Module de cisaillement G_{xy} (GPa) | Résistance en torsion τ_{max} (MPa) | Masse volumique ρ (kg/m ³) |
|-------------|---------------------------------|--|---|---|
| Acier | 200 | 78,9 | 600 | 7800 |
| Verre/Époxy | 20 | 12 | 60 | 2600 |

Tableau 4.3 : Comparaison des propriétés intrinsèques de matériaux constitutifs des ressorts hélicoïdaux

L'utilisation des composites vient d'une recherche de gain de poids, puisque la résistance élevée des fibres et la faible densité des résines permettent d'obtenir des caractéristiques spécifiques élevées (rapport caractéristique / densité). Aujourd'hui, ils concurrencent très largement tous les matériaux classiques tels que l'aluminium et l'acier. Ils sont sélectionnés pour leurs caractéristiques suivantes :

- légèreté, associée à des caractéristiques mécaniques élevées permettant l'allègement des structures.
- comportement en fatigue amélioré par rapport à l'acier et aux alliages,
- résistance à la corrosion ce qui réduit les intervalles d'inspection des structures,
- bonne isolation électrique,
- excellentes propriétés d'amortissement.

Parmi ces différents intérêts, il nous est à présent possible de comparer le gain de poids potentiel sur un usage bien défini.

4.5.2 Comparaison fondamentale

D'un point de vue théorique, l'intérêt du matériau d'un ressort hélicoïdal est illustré par le front de Pareto obtenu en minimisant la masse et maximisant la raideur. La figure 4.11 illustre le potentiel élevé des tubes tressés en verre/époxy par rapport à l'acier.

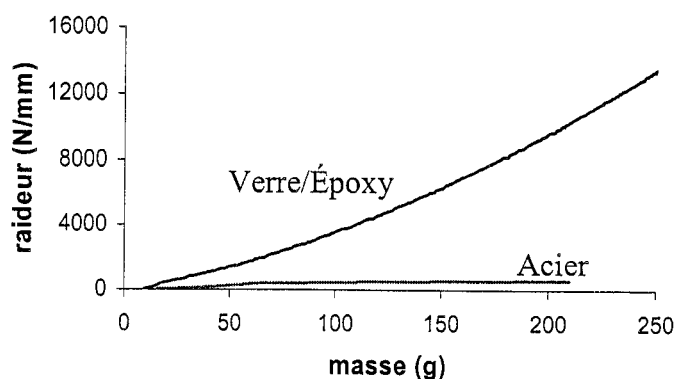


Figure 4.11 : Fronts de Pareto obtenus pour une minimisation de la masse et maximisation de la raideur pour différents matériaux.

Néanmoins une analyse plus détaillée montre que les ressorts composites optimaux ne permettent quasiment pas de déflexion admissible, leur raideur étant extrêmement élevée! Cette observation montre qu'ils ne correspondent pas à des ressorts utilisables. Si on cherche à imposer une déflexion admissible de 5 mm, on fait reculer le front Pareto du composite alors que celui de l'acier ne bouge quasiment pas (voir figure 4.12). L'avantage demeure toutefois au matériau composite, mais pour des déflexions souhaitées plus importantes, comme ce sera très souvent le cas, on va retourner la tendance.

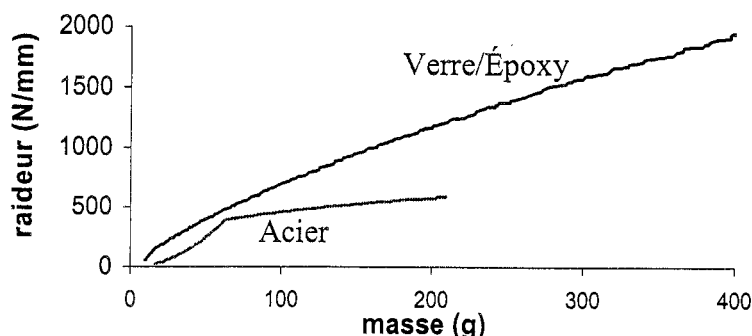


Figure 4.12 : Fronts de Pareto pour les mêmes données que précédemment, en ajoutant la contrainte de déflexion minimale admissible $\delta_{ad} > 5 \text{ mm}$

4.5.3 Domaine d'applications potentielles

Le procédé d'enroulement à chaud ou à froid impose des limitations dans l'indice C des ressorts classiques. Il est généralement conseillé de le prendre entre 5 et 10. Pour les ressorts composites le procédé de fabrication utilisé est différent, ce qui permet d'une part de prendre le fil relativement épais (d_{ext} jusqu'à 30 mm), et d'autre part de ne pas se limiter nécessairement à des indices inférieurs à 10. Si on reprend le cahier des charges défini au chapitre précédent et qu'on l'applique à l'acier, la réponse {masse, raideur} est d'un autre ordre de grandeur que celle donnée par le composite. La figure 4.13 montre que **les ressorts composites sont plus légers et plus flexibles**, leur intérêt industriel ne s'exprimera donc pas dans le même type d'application que les ressorts classiques.

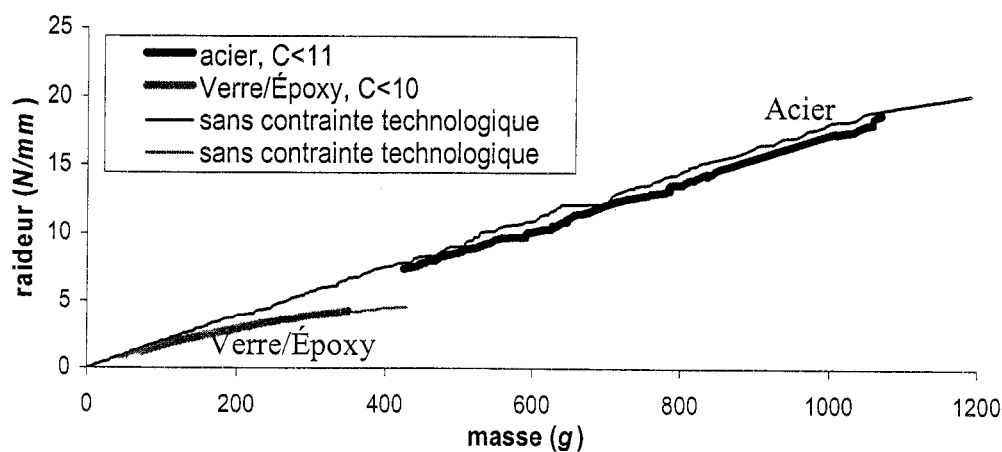


Figure 4.13 : Fronts de Pareto obtenus d'après le cahier des charges, en intégrant les contraintes technologiques sur l'indice du ressort

On constate également qu'il n'est pas possible de trouver des ressorts en acier d'indice C inférieur à 10 satisfaisant le cahier des charges, contrairement aux matériaux composites. Or la fabrication de ressorts d'indices supérieurs en acier nécessite un équipement bien plus lourd, et de fait alourdit considérablement leur coût nominal. Dans ce cas-là les ressorts composites peuvent alors constituer une alternative avantageuse, à condition que la raideur souhaitée pour le ressort puisse être inférieure à 5 N/mm .

4.6 Bilan

On a donc élaboré un outil de conception inverse capable de traiter de problèmes multicritères grâce à une stratégie évolutionniste fondée sur l'approche de Pareto. Cet algorithme peut traiter de variables entières comme le nombre de plis ou de spires actives, et peut intégrer des fonctions-contraintes inhérentes à la faisabilité et au bon comportement des ressorts générés. On a pu améliorer la précision des solutions par rapport aux formules analytiques sans avoir un temps de calcul trop coûteux. Cela donne une correction de l'ordre de 20% pour la raideur, à masse égale, et ce gain d'information est précieux pour un concepteur.

Cet outil, dédié à la conception inverse, a également servi pour une comparaison des performances des matériaux constitutifs d'un ressort. Entre autres, il met en évidence le gain de performances apporté par des angles de tressage différents pour chacun des plis, par rapport à un matériau homogène, qui vient de l'inhomogénéité des contraintes dans le fil du ressort.

Enfin l'élaboration de la même méthode d'optimisation a été appliquée à la conception inverse de ressorts en acier, en prenant les résultats de la mécanique des ressorts pour le calcul des fonctions-objectifs. La comparaison des solutions optimales laisse envisager, pour les tubes tressés en verre/époxy, des applications industrielles nécessitant des ressorts de **grande flexibilité** ou de **faible masse** pour un encombrement limité.

Chapitre 5 : Validation expérimentale du comportement mécanique du ressort composite

Dans le présent chapitre on s'intéresse aux performances effectivement mesurées en pratique après fabrication. Pour cela on teste des ressorts hélicoïdaux tubulaires en matériau composite verre/époxy, issu d'un procédé de fabrication par transfert de résine sur une préforme fibreuse.

- $D = 96mm$,
- $d_{int} = 14mm$,
- $p = 60.3mm$,
- $N = 7$ spires actives,
- $n = 7$ plis, de $0.5mm$ d'épaisseur,
- angle de tressage $\pm\theta_i$ de 16° à 29° .

La préforme employée est une tresse de fibre de verre EC13-300 Tex-Z 20-1383 SILAN de la compagnie Chomarat (Mariac, France). La résine époxy utilisée faisant l'objet d'un brevet, sa formulation est gardée secrète.

5.1 Caractéristiques des ressorts hélicoïdaux testés

5.1.1 Paramètres géométriques et fluctuations éventuelles

Le ressort est issu d'un moule dont les dimensions géométriques sont fixes. Toutefois il faut contrôler le respect de ces dimensions sur la pièce finale, car celles-ci ont une influence primordiale sur le comportement mécanique du ressort. Ainsi pour la constante de raideur (formule (1.8)) la moindre fluctuation du diamètre d'enroulement D se répercutera trois fois plus sur la raideur du ressort!

Toutefois en pratique, la dimension la plus susceptible d'être sujette à des modifications lors de la fabrication est le diamètre intérieur d_{int} du fil, puisqu'il s'agit du seul paramètre géométrique qui n'est pas directement contrôlé par le moule rigide. Il est délicat de s'assurer de sa valeur sur toute la longueur du ressort, à moins de découper le ressort par section. On se contente donc de le vérifier à chaque extrémité. Le diamètre

d'enroulement D , le pas p et le nombre de spires actives N en revanche ne sont pas sujets à des fluctuations significatives. Une autre précaution doit être prise concernant la forme du fil : on veut théoriquement une section circulaire creuse, mais suite au procédé de fabrication employé, on peut observer une légère tendance elliptique (figure 5.1), avec l'axe principal de l'ellipse orienté le long de l'axe d'enroulement. Cette déformation cause une modification de la raideur et des contraintes de torsion induites, puisque les formules établies ne sont valables que pour les ressorts de section circulaire.

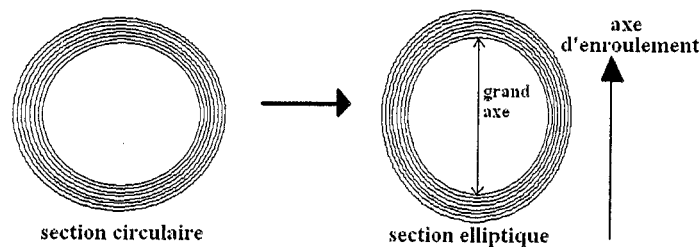


Figure 5.1 : Écrasement de la section circulaire en ellipse

5.1.2 Paramètres matériaux et contrôle de qualité

De la même façon le matériau composite fabriqué peut être différent de celui souhaité. Ces variations peuvent toucher :

- La fraction volumique de fibres V_f ,
- La densité du matériau d_{mat} et le taux de vide ρ_v ,
- L'angle de tressage de chacun des plis $\pm\theta_i$.

On est capable de contrôler le taux de fibre, la densité et le taux de vide par des tests décrits dans les normes ASTM D2584-94 pour la pyrolyse, D792-91 pour la mesure de la densité, et D2734-94 pour la mesure du taux de vide. Ces paramètres dépendent surtout des paramètres d'injection et de cuisson du procédé. Il est par contre plus difficile de contrôler les angles de tressage de chaque pli. Or ces derniers jouent un rôle important dans la raideur, une variation d'angle de 5° pouvant mener à une variation de 15% dans le module de cisaillement G_{eq} équivalent, et donc dans la raideur du ressort.

5.2 Méthodes usuelles de tests et adaptation aux matériaux composites

5.2.1 Méthodes pour tester un ressort métallique

5.2.1.1 Constante de raideur du ressort

Le montage utilisé pour effectuer les essais de compression axiale sur les ressorts composites est représenté à la figure 5.2. Il met en œuvre la machine MTS, reliée à un système d'acquisition de données. Elle propose une large gamme d'utilisation et permet entre autres, de réaliser des essais en statique et en fatigue. Il est possible d'appliquer des charges situées entre -100 kN et 100 kN et des déplacements situés entre -100 mm et 100 mm . Le montage réalisé est très simple en raison de la géométrie pratique du ressort. Celui-ci a été disposé entre deux plateaux de chargement plans, sur lesquels sont fixés deux guides présentant un diamètre de 60 mm , placés à l'intérieur du ressort afin d'éviter une éventuelle « chasse » de ce dernier.

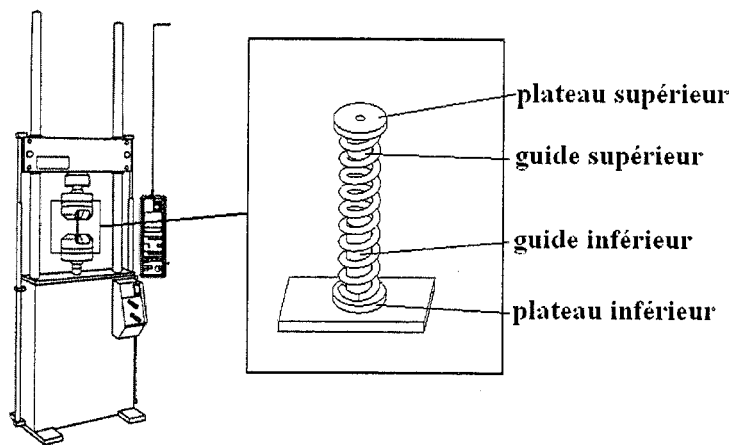


Figure 5.2 : Montage de compression axiale d'un ressort sur la machine MTS

Pendant l'essai, le plateau inférieur de la machine MTS impose le déplacement de la partie inférieure du ressort, à une vitesse de 5 mm/min et mesure dans le même temps la force de réaction du ressort. Cette vitesse est suffisamment lente pour simuler un chargement statique, quelque soit le type de matériau (Mouren 2001). Ainsi on a accès à la déflexion en fonction de la charge appliquée. Si on sort du domaine d'élasticité du matériau, on peut alors avoir accès à la déflexion et la charge maximale admissible.

5.2.1.2 Contrainte de torsion induite

Pour un ressort en matériau isotrope, l'utilisation d'un extensomètre permet de connaître la déformation induite au cours de la compression, et donc de revenir aux contraintes exercées sur l'extérieur du ressort. Généralement, ces mesures sont effectuées non pas sur le ressort hélicoïdal dans son ensemble, mais en découpant une demi-spire pour avoir l'espace nécessaire à l'extensomètre (figure 5.3). Celui-ci, orienté à 45° des axes principaux d'enroulement, estime la déformation subie à l'intérieur de la spire, c'est-à-dire à l'endroit le plus contraint : on en déduit la contrainte maximale exercée τ_{max} , par l'intermédiaire du module de cisaillement G du matériau.

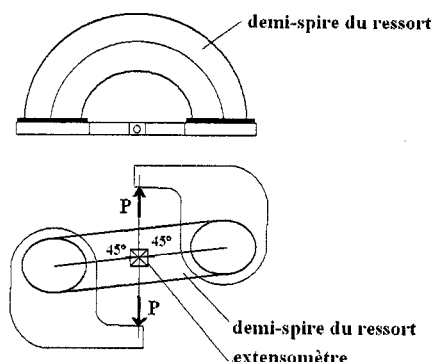


Figure 5.3 : Montage pour la mesure de la déformation sur une demi-spire

5.2.2 Difficultés posées par les matériaux composites

Pour ce qui concerne les ressorts tubulaires en composite, l'analyse de la déflexion en fonction de la charge appliquée ne change pas. Néanmoins la théorie développée dans au chapitre 3 prévoit pour le ressort testé les performances suivantes :

- ✓ Constante de raideur $k = 35.3 N / mm$,
- ✓ Charge maximale admissible $P_{max} = 1,2 kN$,
- ✓ Déflexion maximale admissible $\delta_{max} = 34 mm$.

La machine MTS offre un déplacement maximal de $100 mm$ et un chargement maximal de $100 kN$, donc théoriquement la rupture du matériau sera atteinte avant la

déflexion à bloc ($\delta_B = 260mm$ pour le ressort considéré). S'il est peu commun de voir des ressorts hélicoïdaux susceptibles d'atteindre la rupture avant la charge à bloc, cela permet d'avoir une idée des mécanismes de rupture et de la validité des critères de rupture employés. Cet état de fait vient de l'indice très faible ($C < 5$) des ressorts testés.

Pour l'analyse des contraintes, on effectue une analyse pli par pli pour décrire le comportement du stratifié. Or une étude avec un extensomètre ne donnera au mieux que la déformation du pli intérieur et extérieur, ce qui ne garantit pas de pouvoir mesurer la contrainte maximale. La figure 5.4 montre le niveau théorique de contrainte ainsi que le critère de Tsai-Wu atteint dans chaque pli, pour un chargement causant la rupture ($P = P_{\max}$). Théoriquement le pli extérieur cause la rupture (le 7^e et dernier pli), mais le niveau de sollicitation par rapport au 6^e pli est quasiment identique et la rupture peut donc tout aussi bien provenir de celui-ci. Ainsi on va simplement évaluer la charge de rupture du matériau ainsi que le mode de rupture observé.

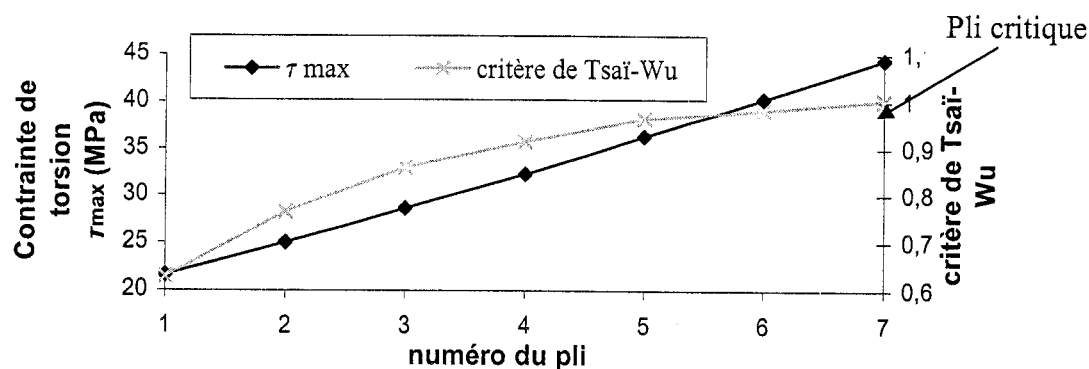


Figure 5.4 : Contraintes et critère de Tsai-Wu prévus dans chaque pli du stratifié

Pour des matériaux composites il est plus délicat d'observer le moment précis où les déformations plastiques apparaissent, puisque les mécanismes de rupture sont progressifs, au contraire des matériaux isotropes dans lesquels la propagation de fissures est très rapide et par conséquent visible instantanément. On peut cependant se baser sur les craquements audibles, témoins de la fissuration, pour en avoir une bonne indication.

5.3 Analyse des résultats expérimentaux

5.3.1 Linéarité de la réponse

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la réponse du ressort est théoriquement linéaire, c'est-à-dire que la déflexion observée est directement proportionnelle au chargement appliqué. Mais cela suppose un contact parfait entre la base du ressort (les tours morts) et les plateaux de chargement de la machine MTS. On constate expérimentalement qu'un chargement de transition est nécessaire pour obtenir ce contact parfait, à savoir que sous l'effet de ce chargement, les bases du ressort s'aplanissent jusqu'à adhérer parfaitement au plateau. À partir de ce moment là on peut lire la véritable constante de raideur. La figure 5.5 illustre ces phases de chargement du ressort.

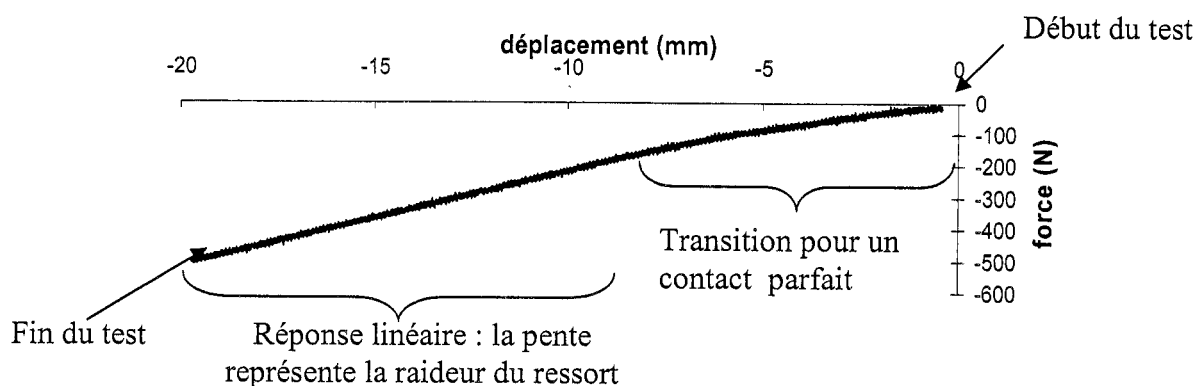
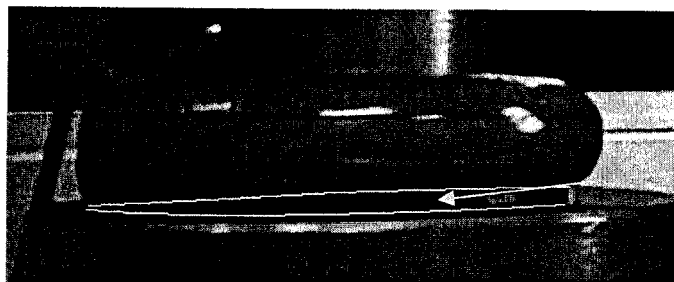


Figure 5.5 : Transition et phase linéaire lors de la compression axiale du ressort R1

Pour chacun des ressorts testés on retrouve ces deux phases, d'autant que la base inférieure (tour mort) de chacun des ressorts fabriqués n'est pas plane, mais légèrement inclinée, alors que le plateau de chargement est parfaitement plat (cf. figure 5.6).



Décalage entre les deux surfaces : le contact n'est pas parfait

Figure 5.6 : Contact entre le ressort et le plateau de chargement du montage

5.3.2 Constante de raideur

En éliminant la phase de transition, on arrive pour chacun des ressorts, malgré leurs défaut, à des réponses quasiment parfaitement linéaire comme le montre le coefficient de corrélation de l'interpolation linéaire très proche de 1, à 10^{-3} près. La figure 5.7 et le tableau 5.1 récapitulent les résultats relevés pour chacun des ressorts.

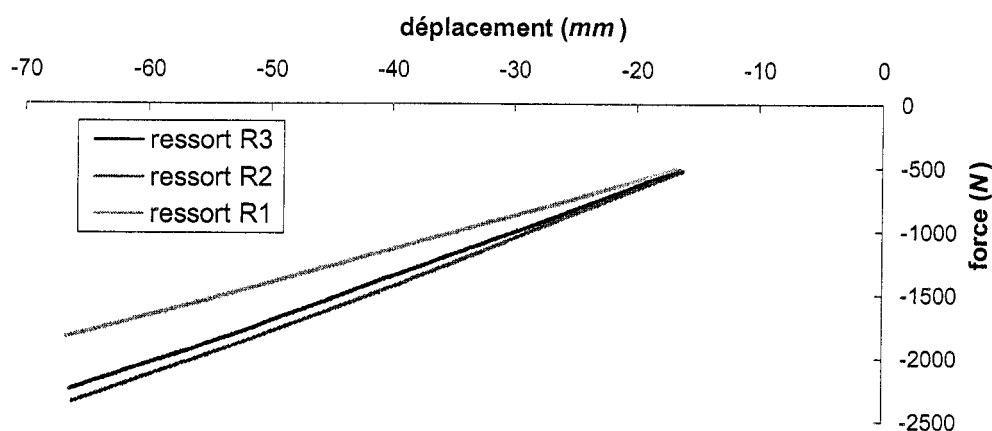


Figure 5.7 : Allure de la réponse des différents ressorts en phase linéaire

| Ressort | coef. corrélation | raideur calculée (N/mm) | % écart à la théorie |
|---------|-------------------|-------------------------|----------------------|
| R1 | 0,9998 | 26,9 | -23,8 |
| R2 | 0,9993 | 36,8 | 4,2 |
| R3 | 0,9997 | 35 | -0,8 |

Tableau 5.1 : Évaluation de la linéarité de la réponse et de la raideur des ressorts

Idéalement la réponse de chaque ressort devrait être la même puisque la géométrie et le matériau sont inchangés. Les différences proviennent des imperfections inhérentes à l'étape de fabrication. Ainsi une observation de *R1* montre l'existence de renforcement (« plis ») à la surface interne du ressort, qui se sont vraisemblablement formés lors de l'enroulement du ressort sur le moule hélicoïdal (voir figure 5.8). Cette modification de la géométrie va abaisser la tenue du ressort en fatigue, ainsi que sa charge maximale (la zone de pli cause une concentration de contraintes qui va initier la rupture). Au niveau des propriétés statiques, puisqu'il s'agit d'un étranglement du fil, on s'attend à une chute de raideur. Cette impression est confirmée par les résultats de *R1*, de constante de raideur inférieure à la théorie de plus de 20%.

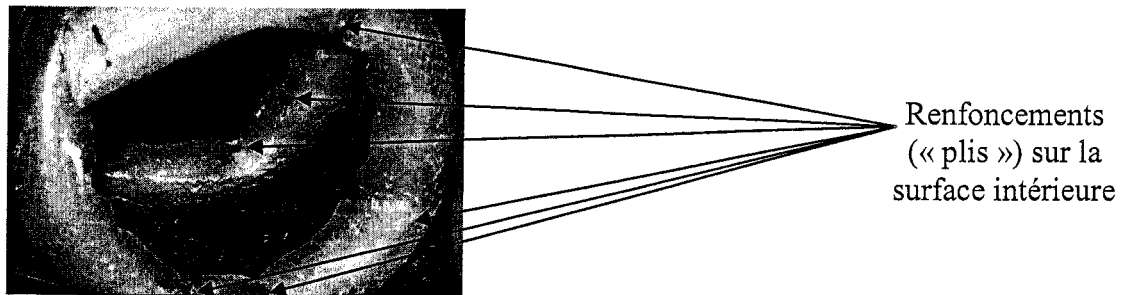


Figure 5.8 : Défauts géométriques du ressort causés lors de l'enroulement

On assiste de surcroît à une déformation de la section circulaire en section elliptique (cf. figure 5.9) qui joue sur la perte de raideur puisque le moment d'inertie d'une section elliptique est inférieur à celui d'une section circulaire. Cette déformation s'explique par un léger « écrasement » du tube sur l'axe lors de l'enroulement.



Figure 5.9 : Forme de la section des échantillons

Enfin on observe le long du fil du ressort des inhomogénéités d'aspect et d'épaisseur, causées par des excès de résines. Ce phénomène est illustré à la figure 5.10 et doit être corrigé pour prévoir le comportement à long terme du matériau. En effet l'aspect extérieur du fil a une importance primordiale sur les propriétés mécaniques, tant statiques que de résistance. Un aspect de surface hétérogène fait obligatoirement varier le diamètre extérieur du fil et induit des concentrations de contraintes aux endroits les plus sollicités de la structure.

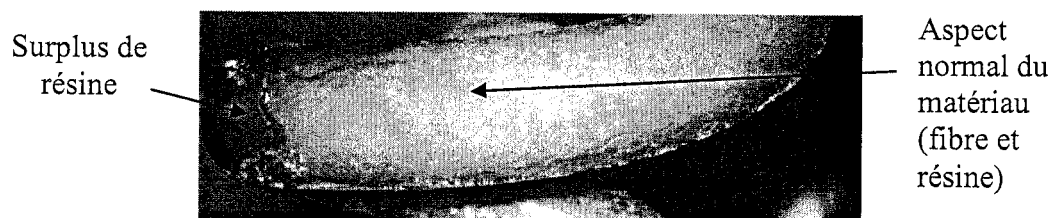
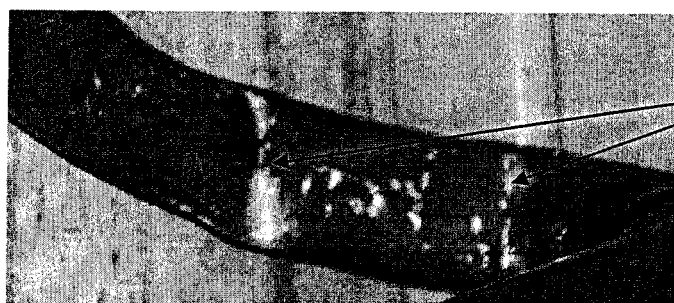


Figure 5.10 : Aspect de surface des échantillons

5.3.3 Charge maximale admissible et modes de rupture observés

Lors de la compression axiale on note des bruits de fissuration du matériau, et le blanchissement des plis de la zone la plus sollicitée. Cette zone de rupture est située dans les défauts issus de l'étape d'enroulement, à savoir les renforcements du tube sur la surface intérieure (voir figure 5.11).



Blanchissement dans les zones de défauts géométriques, après compression du ressort R1 à $\delta = 100 \text{ mm}$

Figure 5.11 : Apparition du blanchissement dans les zones les plus sollicitées du ressort R1

En revanche pour le ressort R2, d'aspect de surface plus homogène et sans ces défauts de renforcement de la surface intérieure, la rupture se matérialise par un blanchissement de la zone interlaminaire proche du point de contrainte maximale (voir figure 5.12). Ce mode de rupture laisse penser que le **cisaillement interlaminaire** va gouverner la tenue du matériau composite et donc déterminer sa résistance.



Blanchissement de la zone interlaminaire, après compression du ressort R2 à $\delta = 100 \text{ mm}$

Figure 5.12 : Apparition du blanchissement dans la zone la plus sollicitée de R2

On remarque que pour chacun des ressorts testés, et simultanément aux premiers craquements audibles, le blanchissement apparaît vers une déflexion de $\delta = 40 \text{ mm}$, soit un chargement $P = 1.2 \text{ kN}$ environ. Cela n'altère cependant pas les propriétés statiques du ressort à des chargements et déflexions supérieures, car le mode de rupture du

composite s'opère de façon progressive et non catastrophique comme pour les métaux ou alliages. Ce comportement permet d'anticiper la rupture totale du matériau et ainsi de changer la pièce sans pour autant avoir de conséquences désastreuses si le nombre de cycles reste faible après l'apparition des premières fissures.

Même si la prévision de la rupture, d'après le critère de Tsai-Wu, s'opérait dans la même zone de chargement (on prévoit $P_{max} = 1.2 \text{ kN}$), cette correspondance reste fortuite pour plusieurs raisons. D'une part il est délicat de se baser uniquement sur le critère de Tsai-Wu comme une loi fiable pour prédire la rupture du matériau, sans avoir expérimentalement étudié les mécanismes d'endommagements au préalable. En effet il semble que le phénomène gouvernant la rupture du matériau soit le cisaillement interlaminaire, qui est gouverné principalement par les propriétés intrinsèques de la matrice ainsi que la nature de l'interface fibre-matrice. Le critère de Tsai-Wu n'est qu'une approximation par défaut qui considère que la rupture du ressort est liée à celle du premier pli (« *first ply failure* »).

Mais surtout, les échantillons testés présentent des défauts géométriques importants, ce qui abaisse la résistance du ressort de façon significative, par rapport à la géométrie théorique du problème. Les défauts induits lors de la fabrication sont trop pénalisants pour que les valeurs du chargement critique obtenues lors des tests de compression soient significatives. Il demeure toutefois intéressant de noter la bonne tenue du matériau même partiellement altéré.

5.4 Validation et futurs travaux

5.4.1 Validation expérimentale des formules théoriques

Ainsi dans le domaine élastique, les ressorts ont un comportement mécanique bien prévu par la théorie. L'incertitude majeure repose sur les propriétés équivalentes du matériau lui-même, car sa résistance en torsion est telle que les essais sur les tubes tressés sont délicats à mener (Zebdi 2004). Ce type de matériau composite est prometteur mais il faut pouvoir connaître de façon complète ses propriétés, notamment

les résistances en torsion, pour pouvoir prétendre optimiser la séquence d'empilement du stratifié et les angles de tressage choisis en fonction du cahier des charges. Le champ d'investigation étant bien évidemment très vaste, on s'est limité au type de matériau décrit au début du chapitre.

D'autre part il convient de garder à l'esprit les défauts géométriques décelés sur les échantillons, qui ont quelque peu altéré les propriétés statiques mais surtout modifient considérablement le comportement en fatigue et la résistance ultime des échantillons. Ainsi on ne considère pas les chargements admissibles observés sur les divers échantillons comme des résultats fiables pour valider l'étude théorique. Il faudra, pour valider ces objectifs spécifiquement, disposer de pièces sans défaut. Cela nécessite une bonne maîtrise du procédé de fabrication pour améliorer et fiabiliser la production.

Enfin on peut noter que cette étude expérimentale ne concerne qu'un seul type de matériau, ainsi qu'une seule forme de ressort. Ainsi même si les échantillons testés avaient eus les propriétés parfaitement équivalentes à la description théorique effectuée aux chapitres 2 et 3, cela ne suffirait pas à valider l'outil de conception inverse dans la gamme de paramètres considérés! On propose donc la démarche expérimentale pour produire les ressorts nécessaires à une validation fiable du modèle théorique développé.

5.4.2 Plan d'expérience pour une validation expérimentale complète

5.4.2.1 Influence du type de matériau

On se fixe comme gamme de matériau disponible les tubes tressés composites en verre/époxy à 60% de taux de fibres, les angles de tressage étant donnés par la relation (4.14) et pris avec une tresse de 1 pouce (25.4mm) tressée à $\pm 45^\circ$ pour référence. La validation expérimentale est dispendieuse et coûteuse en temps, c'est pourquoi on se propose de tester l'influence des paramètres géométriques et matériaux avec le minimum d'échantillons mais judicieusement choisis. Dans un premier temps on s'intéresse aux performances statiques en fonction des paramètres matériau suivants :

- nombre de plis de la séquence d'empilement $4 \leq n \leq 10$,

- Angles de tressage déterminés par la formule (4.14), soit compris entre $20^\circ \leq \theta \leq 70^\circ$
- L'épaisseur de chaque pli étant fixée à $e = 0.5mm$.

Ces différents échantillons peuvent être fabriqués avec le même moule hélicoïdal en intercalant des plis supplémentaires, qui ne seront pas imprégnés de résine, pour assurer une mise en place correcte des tresses (figure 5.13). Cela suppose que le diamètre extérieur du tube sera toujours inférieur à celui du moule rigide. En ne disposant que d'un seul moule rigide il est donc possible de mener le plan d'expérience proposé par le tableau 5.2. On note que pour chacun des ressorts proposés, la rupture est prédite avant le contact solide (le taux de compression, défini comme la charge maximale admissible sur la charge à bloc, est inférieure à 100%), ce qui permet d'analyser également les modes de rupture. Il faudra pour cela produire plusieurs ressorts de mêmes caractéristiques géométriques et matériaux.

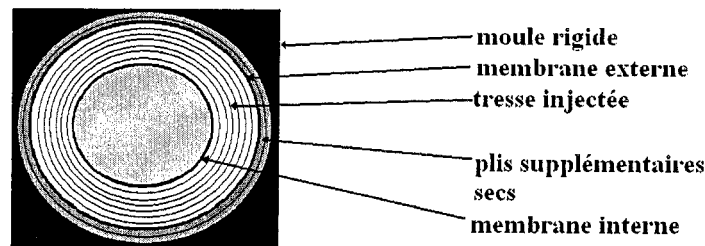


Figure 5.13 : Mise en place d'une tresse plus petite que le moule rigide

| Ressort | Nombre de plis n | diamètre intérieur d_{int} (mm) | angle θ minimum (°) | angle θ maximum (°) | raideur théorique k (N/mm) | Taux de compression à la rupture |
|---------|--------------------|-----------------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|----------------------------------|
| R1 | 4 | 12 | 20° | 25° | 6,38 | 17% |
| R2 | 7 | 12 | 20° | 30° | 19 | 14% |
| R3 | 10 | 12 | 20° | 36° | 44,4 | 14% |
| R4 | 4 | 18 | 32° | 36° | 27,15 | 17% |
| R5 | 7 | 18 | 32° | 42° | 64,9 | 16% |
| R6 | 10 | 18 | 32° | 49° | 121,5 | 17% |
| R7 | 4 | 24 | 44° | 49° | 67,4 | 19% |
| R8 | 7 | 24 | 44° | 57° | 136 | 20% |
| R9 | 10 | 24 | 44° | 67° | 211,5 | 21% |

Tableau 5.2 : Plan d'expérience complet pour les paramètres matériaux, à partir d'un seul moule et d'un seul type de tresse

Pour une investigation complète le travail est colossal si l'on considère que la nature des fibres et de la matrice, le taux volumique de fibre et le mode de tressage sont autant de variables possible du matériau. Il faudra d'abord simplifier le procédé de fabrication avant d'élargir le champ d'investigation à ce point.

5.4.2.2 Influence de la géométrie

Au niveau géométrique les paramètres significatifs sont le diamètre d'enroulement, le pas du ressort et le nombre de spires. Modifier un de ces éléments de géométrie requiert un nouveau moule rigide, ainsi il faut limiter au maximum le nombre d'échantillons nécessaires pour la validation. On a vu au chapitre 3 que les variables significatives sur les performances du ressort sont l'indice C , l'angle de l'hélice α , le nombre de spires N et le rapport d'épaisseur e/d_{ext} . Or cette dernière variable étant entièrement déterminée par la tresse retenue, comme indiqué à la section 5.4.2.1, on s'occupe seulement des trois autres paramètres (plan d'expérience au tableau 5.3).

| Ressort | diamètre enroulement D (mm) | pas de l'hélice p (mm) | nombre de spires actives N | indice du ressort $C = D/d_{ext}$ | angle d'hélice α (degrés) | Raideur théorique k (N/mm) | Taux de compression à la rupture |
|---------|-------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|---|--|------------------------------------|--|
| R1 | 375 | 103 | 6 | 15 | 5 | 1,4 | 100% |
| R2 | 250 | 69 | 8 | 10 | 5 | 3,49 | 87% |
| R3 | 375 | 549 | 8 | 15 | 25 | 1,15 | 15% |
| R4 | 125 | 105 | 8 | 5 | 15 | 27,15 | 12% |
| R5 | 250 | 366 | 4 | 10 | 25 | 6,72 | 12% |
| R6 | 250 | 210 | 6 | 10 | 15 | 4,58 | 21% |
| R7 | 375 | 316 | 4 | 15 | 15 | 2,23 | 27% |
| R8 | 125 | 183 | 6 | 5 | 25 | 36,2 | 6% |
| R9 | 125 | 34 | 4 | 5 | 5 | 55,2 | 100% |

Tableau 5.3 : Plan factoriel d'expérience pour les paramètres géométriques, en fixant le diamètre intérieur $d_{int} = 17mm$ et l'épaisseur du matériau $e = 4mm$.

Ce plan d'expérience propose donc la géométrie de 9 moules qui permettent la fabrication des ressorts nécessaires pour étudier l'influence de tous les paramètres géométriques. Pour le calcul de l'indice C et des performances statiques on part d'une tresse tubulaire de 25 mm de diamètre extérieur et de 4 mm d'épaisseur, soit 8 plis d'angle de tressage variant de 28° à 41°. Il est évidemment possible, à partir des mêmes

moules, de produire d'autres ressorts en faisant varier les caractéristiques matériaux. On a de surcroît l'avantage d'être en présence des deux types de ressorts : ceux qui peuvent théoriquement se comprimer à bloc (spires jointives), et ceux dont la rupture s'opère avant ce taux de compression maximal de 100%.

5.5 Conclusion sur la validation expérimentale

Ces résultats expérimentaux préliminaires sont encourageants : en effet malgré des défauts géométriques grossiers, dus à un manque de maîtrise dans la mise en œuvre du procédé de fabrication, les ressorts produits affichent des performances proches des prédictions théoriques. Du fait des imperfections des échantillons, seul la constante de raideur statique du ressort a pu être caractérisée de façon significative. Cette réponse est en concordance avec l'étude théorique effectuée. Un premier aperçu du mode de rupture mis en jeu a pu également être détecté, à savoir le **cisaillement interlaminaire**.

On propose par la suite la démarche à effectuer pour valider expérimentalement les performances du ressort dans la gamme de paramètres considérée. Deux cas de figures sont envisagés : soit seul un moule hélicoïdal est disponible, auquel cas on ne fera varier que les variables matériaux; soit on peut concevoir la fabrication de plusieurs moules, auquel cas la validation portera sur l'ensemble des paramètres géométriques et matériaux. On s'est néanmoins limité à un seul type de matériau devant la variété de solutions composites disponibles pour le choix des matériaux.

CONCLUSION

Le projet avait pour but de développer un outil de **conception inverse** pour les **ressorts hélicoïdaux tubulaires composites** pour les besoins de la compagnie Composites Atlantic Ltd qui a mis au point un nouveau procédé pour fabriquer ce type de structures par injection sur renfort. Entre autres, les ressorts composites font intervenir des variables géométriques supplémentaires par rapport aux ressorts hélicoïdaux classiques. Ceci a conduit à adopter une démarche originale fondée sur les **algorithmes évolutionnistes** pour gérer ce grand nombre de variables de conception. Le composite est formé de tubes tressés en verre/époxy, donc difficiles à caractériser. Néanmoins on a constaté que l'algorithme de conception est capable d'optimiser à la fois les paramètres géométriques du ressort et les caractéristiques du matériau. Outre la forme du ressort, il est également possible de prévoir la disposition optimale des fibres et d'**optimiser** ainsi la **structure du matériau** selon les performances désirées pour le ressort.

Le logiciel de conception inverse est fondé sur la notion d'**optimisation multicritères** afin d'harmoniser entre eux plusieurs objectifs contradictoires et obtenir ainsi le meilleur ensemble de compromis, appelé *ensemble de Pareto*, entre les différents objectifs. Ce logiciel prend en compte pour évaluer la performance des ressorts, des formules analytiques issues de la théorie classique de Wahl (1963), qui sont « améliorés » grâce à une **analyse par éléments finis** réalisée avec des éléments volumiques pour un matériau orthotrope. On a mené une batterie d'expériences pour construire, à l'aide de la méthode d'interpolation du **krigeage dual**, une véritable « **abaque électronique** » de la performance du ressort. L'évaluation des fonctions-objectifs fait appel à cet interpolateur. Ceci ne perturbe pas la rapidité d'inférence de l'algorithme.

L'interface graphique permet un contrôle interactif de la convergence par l'ingénieur-concepteur. Plusieurs composites peuvent être proposés pour l'optimisation, selon le mode de tressage choisi. Dans l'optique d'offrir un outil convivial au concepteur, l'utilisation de l'algorithme reste très simple : quelle que soit la nature du cahier des charges, un simple fichier texte est suffisant pour prendre en compte l'ensemble des données du problème.

Finalement les analyses préliminaires effectuées ont mis en évidence le bon fonctionnement de la méthode employée, en soulignant le **gain** apporté par les composites par rapport à l'acier, notamment dans des applications où la **flexibilité** et la **légèreté** du ressort sont primordiales.

La **validation expérimentale** effectuée s'est avérée limitée, quoique concluante en ce qui concerne la **raideur statique** des ressorts. Les limitations proviennent d'une maîtrise insuffisante du procédé de fabrication, qui n'a donc pas permis de produire tous les échantillons nécessaires à une validation expérimentale complète. Une fois qu'on aura pu assurer la fiabilité et la reproductibilité du procédé, on sera en mesure d'élargir cette étude sur plusieurs points :

- Tout d'abord, on pourra évaluer les performances dynamiques et en fatigue du ressort et affiner l'évaluation de la rupture du matériau qui est fondée jusqu'ici sur le critère quadratique de Tsai-Wu.
- On sera également en mesure d'élargir la gamme de matériaux considérés, en prenant par exemple des tubes stratifiés constitués de renforts unidirectionnels afin d'éviter l'effet négatif d'ondulation des fibres.
- En outre, on peut imaginer utiliser d'autres fibres et d'autres matrices pour améliorer les propriétés du ressort (comme des fibres de carbone par exemple qui vont raidir la structure sans l'alourdir).

- De surcroît, il est envisageable d'utiliser les propriétés amortissantes d'un matériau viscoélastique insérer dans la section creuse du ressort pour améliorer son amortissement.
- Enfin, il est possible d'imaginer une variation du diamètre d'enroulement D le long de l'axe du ressort. Ceci donnerait un degré de liberté supplémentaire pour concevoir et optimiser la structure.

RECOMMANDATIONS

À la lumière des observations réalisées au cours de ce projet, diverses recommandations peuvent être formulées en vue d'une étude plus approfondie des ressorts hélicoïdaux tubulaires composites :

1. Tout d'abord, la caractérisation des tubes tressés doit permettre de mesurer expérimentalement l'effet de l'angle de tressage sur le module de cisaillement et la résistance en torsion, qui sont les deux propriétés fondamentales régissant la réponse du matériau dans un ressort hélicoïdal. Dans cette étude, on s'est contenté de quelques points d'observations et de données bibliographiques pour établir l'influence de l'angle de tressage.
2. Le principal problème rencontré concerne la faible quantité de ressorts disponibles et leur qualité. Ceci fut un obstacle à la validation expérimentale du modèle théorique développé, et demandera un travail de mise au point pour rendre plus fiable le procédé de fabrication et ainsi produire des pièces sans défauts majeurs. Une fois cette étape achevée, la caractérisation complète du ressort pourra alors avoir lieu, c'est-à-dire son comportement dynamique et en fatigue, ainsi que l'analyse de son mode de rupture.
3. Le logiciel de conception inverse implémenté utilise un algorithme d'optimisation multicritères extrêmement efficace. De nouvelles fonctionnalités peuvent donc être ajoutées au fur et à mesure des progrès sur la connaissance du ressort. On peut même envisager d'intégrer des contraintes technologiques liées à la faisabilité ou au coût de production.

RÉFÉRENCES

- [1] AL-QURESHI, H. A. 2001. Automobile leaf springs from composite materials. Journal of Materials Processing Technology. 118:3. 58-61.
- [2] ATKINSON, A. C., DONEV, A. N. 1992. Optimum experimental design.
- [3] BECKER, L. E., CLEGHORN, W. L. 1992. On the buckling of helical compression springs. International Journal of Mechanical Sciences. 34:4. 275-282
- [4] BYUNG-SUN, K.; JOON-HYUNG, B., BYUNG-HA, K. 1999. Structure-property relationships of composite coil springs processed by RTM. 12th International Conference of Composite Materials.
- [5] CHARLEBOIS, K. M. 2001. Rapport de stage: Projet Ressort Composite.
- [6] CHARLEBOIS, K.M. 2003. Évaluation des propriétés physiques et mécaniques des renforts tressés et leurs composites. Génie mécanique, École Polytechnique de Montréal;
- [7] COHN, D.; GHARAMANI, Z.,et JORDAN, M. 1996. Active learning with statistical models.
- [8] DEB, K.,AGRAWAL, S.,PRATAP, A.,MEYARIVAN, T. 2000. A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II. Institute of Technology, Kampur, India.
- [9] DEB, K., SRINIVAS, N. 1994. Multiobjective Optimization Using Non dominated Sorting in Genetic Algorithms. Institute of Technology, Kampur, India.
- [10] DUCHEMIN, M. 1986. Ressorts: considérations générales. Techniques De

L'Ingénieur. Catégorie Fonctions Et Composants Mécaniques.

- [11] FLEMING, P. J., FONSECA, C. 1993. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: formulation, discussion and generalization. Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms.
- [12] FORTIN, A., GARON, A. 1997. Les éléments finis: de la théorie a la pratique, Notes de cours. École Polytechnique de Montreal.
- [13] GOBBI, M. ,MASTINU, G. 2001a. Analytical description and optimization of the dynamic behaviour of passively suspended road vehicles. Journal of Sound and Vibration.
- [14] GOBBI, M. ,MASTINU, G. 2001b. On the optimal design of composite material tubular helical spring. Meccanica. 36. 525-553.
- [15] GOEL, P. ,SINGH, N. 1997. A modelling approach for integrating durability engineering and robustness in product design. Computers in Industrial Engineering. Computers in industrial engineering. 33 :1-2. 353-356.
- [16] Guide de l'utilisateur SYSPLY 2003. E.S.I. Group. Lyon 2003.
- [17] HARINGX, J. A. 1948. On highly compressive helical springs and rubber rods and their application for vibration-free mounting. H.V. Philips Research Laboratory. Eindhoven.
- [18] HARTE, A. M., FLECK, N. A. 2000.Deformation and failure mechanisms of braided tubes in compression and torsion. Acta Materialiae. 48. 1259-1271.
- [19] HOLLAND, J.H. 1975. Adaptation in Natural and Artificial Systems. University of Michigan Press.

- [20] HORN, J.; NAFPLIOTIS, N., Goldberg, D. 1994. A Niche Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization. Proceedings of the IEEE Conference on Evolutionary Computation. 1. 82-87
- [21] KAMANAYO, G.; TROCHU, F., SANSCHAGRIN, B. 1994. Prediction of Shrinkage by Dual Kriging for Injection Molded Polypropylene Plaques. Advances in Polymere Techniques. 13:4. 305-314.
- [22] LEE, J., THOMPSON, D. J. 2001. Dynamic stiffness formulation, free vibration and wave motion of helical spring. Journal of Sound and Vibration. 239:2. 297-320.
- [23] LONGMAN. 1990. Composite Material in Space Aircraft. National Engineering Laboratory.
- [24] MALLICK, P. K. 1992. Design and development of composite elliptic springs for automotive suspensions. 40th annual conference, Reinforced Plastics Composites Institute.
- [25] MALLICK, P.K. 1993. Fiber-Reinforced Composites: Materials, manufacturing, and design. Dekker.
- [26] MALLICK, P.K. 1987. Static mechanical performance of composite elliptic springs. ASME Engineering Material Technology.
- [27] MERELO, J. J.; KEIJZER, M., SCHOENAUER, M. Evolving Objects. [Web page] <http://eodev.sourceforge.net/> 2004.
- [28] MOUREN, D. 2001. Projet de Fin d'Étude: Ressorts Composites. Génie Mécanique. École Polytechnique de Montréal.
- [29] PALUDETTI, C., TROCHU, F. 1995. Library LIBKRIG, Reference Manual. Cours MEC 6310.

- [30] PEARSON, D. 1980. The transfert matrix method for the vibration of compressed helical springs. Journal of Mechanical Sciences.
- [31] PONSLET, E., MILLER, W. 1998. Coil springs with constrained layers visco-elastic damping for passive isolation. SPIE 3327.
- [32] RAJENDRAN, I., VIJAYARANGAN, S. 2001. Optimal design of a composite leaf spring using genetic algorithms. Computers & Structures. 79-11. 1121-1129.
- [33] SOFIYEV A. H. 2003. Torsional buckling of cross-ply laminated orthotropic composite cylindrical shells subject to dynamic loading. European Journal of Mechanics - A/Solids. 22-6. 943-951.
- [34] 1 STATNIKOV, R., MATUSOV, J. 1995. Multicriteria optimization and engineering. Chapman and Hall.
- [35] TIMOSHENKO, S.P. 1936. Theory of elastic stability. New York.
- [36] TOUBOUL, M. 2004. Étude du comportement mécanique de ressorts en composite. École Polytechnique de Montréal.
- [37] TROCHU, F. 1993. A contouring programme based on dual kriging interpolation. Engineering With Computers. 9. 160-177.
- [38] TROCHU, F. 2001. Krigeage en FAO et CAO, Notes de cours. École Polytechnique de Montréal.
- [39] TSE, P. C.; LAU, K. J.; WONG, W. H., REID, S. R. 2002. Spring stiffnesses of composite circular springs with extended flat contact surfaces under unidirectional line-loading and surface-loading configurations. Composite Structures. 55-4. 367-386..

- [40] TSE, P. C.; REID, S. R. 2001. Springs constants of filament wound composite circular rings. Journal of Mechanical Engineering Science.
- [41] VAN TOOREN, A., ANTONIAZZI, A. 2000. Feasability study on the production of a composite helical spring. Proceeding 21th SAMPE International Conference.
- [42] WAHL, A. M. 1963. Mechanical springs. Penton Publishing Company.
- [43] WEAVER, P. M. 2000. Design of laminated composite cylindrical shells under axial compression. Composites Part B: Engineering. 31-8. 669-679.
- [44] WEAVER, P.M., DICKENSON, R. 2003. Interactive local/Euler buckling of composite cylindrical shells. Computers & Structures. 80:30-31. 2767-2773.
- [45] YILDIRIM, V., SANCAKTAR, E. 2000. Linear free vibration analysis of cross-ply laminated cylindrical helical springs. International Journal of Mechanical Sciences. 42 :6. 1153-1169.
- [46] ZEBDI, O. 2004. Caractérisation mécanique des composites à renfort tressé et application aux ressorts hélicoïdaux. Génie Mécanique. École Polytechnique de Montréal.

ANNEXE 1

Plan factoriel d'expérience pour la construction des fonctions de correction de la constante de raideur et des contraintes maximale de torsion.

| Indice | Rapport | Angle hélice | Nombre de spires active | Angle tressage | % écart EF / théorie Raideur | % écart EF / théorie Contrainte |
|--------|-------------|---------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| C | e/d_{ext} | $\alpha (^{\circ})$ | N | $\pm\theta (^{\circ})$ | k | τ_{max} |
| 2 | 0,1 | 25 | 6 | 30 | -17,88 | -7,93 |
| 6 | 0,25 | 25 | 9 | 30 | -7,93 | -5,34 |
| 2 | 0,4 | 15 | 6 | 60 | -3,88 | 4,20 |
| 6 | 0,25 | 25 | 3 | 60 | -15,99 | -2,49 |
| 2 | 0,1 | 5 | 9 | 45 | 0,72 | -0,56 |
| 6 | 0,4 | 15 | 6 | 45 | -5,05 | 3,53 |
| 6 | 0,4 | 5 | 6 | 60 | 1,33 | 2,95 |
| 6 | 0,4 | 25 | 6 | 30 | -6,07 | -3,02 |
| 6 | 0,4 | 15 | 3 | 60 | -4,11 | 4,26 |
| 6 | 0,1 | 15 | 6 | 30 | -4,21 | -10,25 |
| 10 | 0,1 | 15 | 3 | 30 | -1,08 | -9,86 |
| 6 | 0,25 | 25 | 6 | 45 | -17,61 | -2,26 |
| 10 | 0,25 | 25 | 3 | 45 | -16,25 | -1,93 |
| 10 | 0,1 | 5 | 3 | 45 | 0,00 | -14,26 |
| 6 | 0,25 | 15 | 6 | 60 | -5,46 | -1,87 |
| 6 | 0,25 | 15 | 3 | 30 | 0,19 | 0,05 |
| 10 | 0,25 | 5 | 6 | 60 | 0,89 | -3,57 |
| 2 | 0,1 | 15 | 6 | 45 | -7,04 | -4,64 |
| 2 | 0,4 | 25 | 6 | 45 | -15,67 | 2,91 |
| 6 | 0,1 | 25 | 3 | 30 | -10,40 | -11,32 |
| 2 | 0,25 | 15 | 6 | 30 | -0,80 | -4,37 |
| 2 | 0,4 | 25 | 3 | 60 | -16,09 | 3,63 |
| 10 | 0,4 | 25 | 9 | 45 | -17,07 | 2,20 |
| 10 | 0,25 | 15 | 9 | 30 | -1,41 | -3,60 |
| 10 | 0,4 | 5 | 6 | 45 | 1,30 | 1,78 |
| 2 | 0,4 | 15 | 9 | 45 | -3,62 | 4,11 |
| 10 | 0,1 | 25 | 6 | 45 | -18,45 | -12,21 |
| 10 | 0,4 | 15 | 3 | 45 | -4,17 | 3,68 |
| 6 | 0,4 | 25 | 9 | 60 | -6,78 | 2,36 |
| 10 | 0,1 | 5 | 6 | 30 | 0,80 | -10,69 |
| 6 | 0,25 | 5 | 9 | 60 | 0,86 | -2,80 |
| 2 | 0,1 | 15 | 3 | 60 | -8,41 | -5,85 |
| 2 | 0,4 | 5 | 3 | 45 | 1,41 | 5,85 |
| 2 | 0,1 | 25 | 9 | 60 | -20,37 | -4,46 |
| 10 | 0,4 | 5 | 9 | 30 | 1,99 | 4,09 |
| 2 | 0,1 | 15 | 9 | 30 | -5,83 | -5,58 |
| 6 | 0,1 | 5 | 9 | 30 | 0,36 | -9,96 |
| 6 | 0,4 | 5 | 3 | 30 | 2,26 | 2,95 |

| Indice | Rapport | Angle hélice | Nombre de spires active | Angle tressage | % écart EF / théorie Raideur | % écart EF / théorie Contrainte |
|--------|-------------|---------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| C | e/d_{ext} | $\alpha (^{\circ})$ | N | $\pm\theta (^{\circ})$ | k | τ_{max} |
| 2 | 0,25 | 15 | 3 | 45 | -5,91 | -1,46 |
| 10 | 0,4 | 15 | 9 | 60 | -5,03 | 2,58 |
| 2 | 0,4 | 15 | 3 | 30 | -0,40 | 2,22 |
| 2 | 0,4 | 5 | 9 | 60 | 3,49 | 6,21 |
| 10 | 0,25 | 25 | 6 | 30 | -6,59 | -7,88 |
| 6 | 0,1 | 15 | 9 | 60 | -6,46 | -11,11 |
| 6 | 0,25 | 15 | 9 | 45 | -5,76 | -2,90 |
| 10 | 0,1 | 25 | 9 | 30 | -9,74 | -15,13 |
| 10 | 0,1 | 15 | 6 | 60 | -5,97 | -11,77 |
| 6 | 0,1 | 5 | 3 | 60 | -0,17 | -11,25 |
| 6 | 0,4 | 15 | 9 | 30 | -0,81 | 1,78 |
| 6 | 0,4 | 25 | 3 | 45 | -15,69 | 3,53 |
| 6 | 0,25 | 5 | 3 | 45 | 0,37 | -3,03 |
| 10 | 0,25 | 5 | 3 | 30 | 1,90 | -2,97 |
| 10 | 0,4 | 25 | 3 | 30 | -3,10 | 0,03 |
| 2 | 0,25 | 25 | 6 | 60 | -17,88 | 0,17 |
| 2 | 0,1 | 25 | 3 | 45 | -21,57 | -5,69 |
| 2 | 0,25 | 25 | 9 | 45 | -17,62 | 0,40 |
| 10 | 0,25 | 5 | 9 | 45 | 0,78 | -3,88 |
| 2 | 0,1 | 5 | 3 | 30 | -2,04 | -5,46 |
| 2 | 0,25 | 25 | 3 | 30 | -11,27 | -8,17 |
| 2 | 0,25 | 5 | 9 | 30 | 2,97 | -0,49 |
| 6 | 0,25 | 5 | 6 | 30 | 1,44 | -0,62 |
| 2 | 0,25 | 5 | 3 | 60 | 0,60 | 0,10 |
| 2 | 0,25 | 15 | 9 | 60 | -4,80 | 0,19 |
| 10 | 0,4 | 5 | 3 | 60 | 1,39 | 0,72 |
| 10 | 0,1 | 15 | 9 | 45 | -6,47 | -12,72 |
| 6 | 0,1 | 5 | 6 | 45 | -0,14 | -9,03 |
| 10 | 0,1 | 25 | 3 | 60 | -16,51 | -11,91 |
| 6 | 0,1 | 25 | 6 | 60 | -18,27 | -10,25 |
| 10 | 0,4 | 15 | 6 | 30 | -0,25 | 4,02 |
| 6 | 0,4 | 5 | 9 | 45 | 1,31 | 8,04 |
| 2 | 0,4 | 25 | 9 | 30 | -8,62 | -0,87 |
| 10 | 0,25 | 25 | 9 | 60 | -17,29 | -3,76 |
| 10 | 0,1 | 5 | 9 | 60 | 0,32 | -13,01 |
| 10 | 0,25 | 15 | 6 | 45 | -5,55 | -2,33 |
| 10 | 0,4 | 25 | 6 | 60 | -16,37 | 2,95 |
| 2 | 0,4 | 5 | 6 | 30 | 4,07 | 4,95 |
| 6 | 0,1 | 15 | 3 | 45 | -6,59 | -8,74 |
| 6 | 0,1 | 25 | 9 | 45 | -19,19 | -7,17 |
| 10 | 0,25 | 15 | 3 | 60 | -4,47 | -1,87 |
| 2 | 0,25 | 5 | 6 | 45 | 1,85 | 0,04 |

ANNEXE 2

Ajout de points de mesures par algorithme d'apprentissage, pour l'estimation de la raideur.

| Indice | Rapport | Angle hélice | Nombre de spires active | Angle tressage | % écart EF / théorie Raideur | Erreur moyenne |
|--------|-------------|--------------|-------------------------|-----------------|------------------------------|----------------|
| C | e/d_{ext} | α (°) | N | $\pm\theta$ (°) | k | |
| 3,33 | 0,1 | 8,33 | 4 | 35 | -2,45 | 5,01 |
| 3,33 | 0,3 | 18,33 | 7 | 50 | -9,47 | 5,05 |
| 7,33 | 0,3 | 18,33 | 7 | 35 | -6,29 | 5,16 |
| 8,67 | 0,25 | 21,67 | 8 | 55 | -15,91 | 3,53 |
| 4,67 | 0,2 | 8,33 | 5 | 55 | -3,63 | 3,63 |
| 8,67 | 0,35 | 5 | 4 | 55 | -1,89 | 3,6 |
| 8,67 | 0,15 | 8,33 | 5 | 40 | -0,40 | 3,46 |
| 10 | 0,35 | 18,33 | 8 | 50 | -9,17 | 3,34 |
| 3,33 | 0,4 | 8,33 | 4 | 40 | 0,47 | 3,22 |
| 3,33 | 0,25 | 8,33 | 8 | 35 | -0,01 | 3,17 |
| 8,67 | 0,15 | 21,67 | 3 | 55 | -15,95 | 3,18 |
| 8,67 | 0,35 | 15 | 8 | 55 | -8,31 | 2,98 |
| 10 | 0,35 | 18,33 | 6 | 45 | -8,55 | 2,73 |
| 10 | 0,25 | 25 | 3 | 30 | -4,21 | 2,73 |
| 9 | 0,2 | 25 | 6 | 45 | -17,57 | 2,07 |
| 4 | 0,1 | 15 | 3 | 60 | -6,80 | 1,78 |
| 8 | 0,15 | 12,5 | 7 | 40 | -3,49 | 1,63 |
| 7 | 0,3 | 20 | 9 | 55 | -13,94 | 1,46 |
| 3 | 0,25 | 5 | 6 | 50 | 0,72 | 1,4 |

ANNEXE 3

Ajout de 10 points de mesures par algorithme d'apprentissage, pour l'estimation de la contrainte maximale de torsion

| Indice | Rapport | Angle hélice | Nombre de spires active | Angle tressage | % écart EF / théorie contrainte | Erreur moyenne |
|--------|-------------|--------------|-------------------------|-----------------|---------------------------------|----------------|
| C | e/d_{ext} | α (°) | N | $\pm\theta$ (°) | T_{max} | |
| 3,33 | 0,25 | 21,67 | 4 | 35 | -3,50 | 0,51 |
| 8,67 | 0,15 | 5 | 8 | 55 | -9,98 | 0,5 |
| 7,33 | 0,2 | 8,33 | 8 | 40 | -5,06 | 0,49 |
| 7,33 | 0,15 | 8,33 | 4 | 50 | -9,04 | 0,46 |
| 3,33 | 0,35 | 15 | 4 | 35 | 3,70 | 0,34 |
| 8,67 | 0,25 | 21,67 | 8 | 55 | -2,92 | 0,32 |
| 6 | 0,35 | 21,67 | 9 | 50 | 1,26 | 0,32 |
| 2 | 0,4 | 25 | 9 | 55 | 6,29 | 0,34 |
| 3,33 | 0,15 | 21,67 | 5 | 40 | -5,22 | 0,34 |
| 3,33 | 0,3 | 18,33 | 7 | 50 | 0,89 | 0,33 |
| 6 | 0,25 | 15 | 6 | 45 | -2,11 | 0,32 |

ANNEXE 4

Plan d'expérience initial pour l'estimation du flambage d'Euler

| Angle tressage $\pm\theta$ (°) | Nombre de spires active N | Débattement par spire p/d_{ext} | Rapport e/d_{ext} | Élancement du ressort l_0/D | Réponse au flambage δ_{cr}/l_0 |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---|------------------------|-------------------------------------|---|
| 35 | 3 | 6 | 0,40 | 7 | 0,142 |
| 55 | 3 | 6 | 0,40 | 5 | 0,166 |
| 55 | 3 | 2 | 0,10 | 7 | 0,041 |
| 65 | 5 | 8 | 0,20 | 7 | 0,202 |
| 65 | 3 | 2 | 0,30 | 5 | 0,188 |
| 45 | 5 | 2 | 0,40 | 7 | 0,076 |
| 45 | 3 | 8 | 0,10 | 5 | 0,145 |
| 65 | 5 | 4 | 0,40 | 3 | 1,090 |
| 45 | 3 | 8 | 0,30 | 3 | 0,376 |
| 55 | 5 | 6 | 0,30 | 7 | 0,093 |
| 35 | 7 | 4 | 0,10 | 7 | 0,103 |
| 35 | 9 | 4 | 0,30 | 5 | 0,253 |
| 45 | 9 | 8 | 0,30 | 7 | 0,095 |
| 65 | 7 | 4 | 0,20 | 7 | 0,244 |
| 55 | 7 | 2 | 0,40 | 3 | 0,363 |
| 35 | 5 | 8 | 0,20 | 5 | 0,253 |
| 55 | 9 | 4 | 0,40 | 7 | 0,090 |
| 35 | 7 | 2 | 0,30 | 5 | 0,210 |
| 35 | 3 | 2 | 0,20 | 3 | 0,230 |
| 65 | 5 | 4 | 0,10 | 5 | 0,385 |
| 65 | 7 | 8 | 0,40 | 5 | 0,448 |
| 35 | 5 | 4 | 0,30 | 3 | 0,575 |
| 45 | 9 | 2 | 0,20 | 5 | 0,153 |
| 35 | 5 | 6 | 0,20 | 3 | 0,577 |
| 55 | 9 | 6 | 0,20 | 5 | 0,161 |
| 45 | 9 | 6 | 0,40 | 3 | 0,388 |
| 65 | 9 | 8 | 0,20 | 3 | 1,291 |
| 55 | 3 | 4 | 0,20 | 1 | 1,467 |
| 45 | 7 | 6 | 0,10 | 7 | 0,083 |
| 55 | 7 | 8 | 0,10 | 3 | 0,357 |
| 65 | 3 | 6 | 0,10 | 1 | 4,473 |
| 55 | 9 | 2 | 0,10 | 3 | 0,330 |
| 45 | 3 | 4 | 0,40 | 1 | 1,587 |
| 55 | 5 | 8 | 0,30 | 1 | 1,569 |
| 65 | 7 | 6 | 0,30 | 1 | 7,022 |
| 45 | 5 | 2 | 0,10 | 1 | 1,532 |
| 45 | 7 | 4 | 0,20 | 1 | 1,681 |
| 65 | 9 | 2 | 0,30 | 1 | 7,731 |

| Angle tressage $\pm\theta$ (°) | Nombre de spires active N | Débattement par spire p/d_{ext} | Rapport e/d_{ext} | Élancement du ressort l_0/D | Réponse au flambage δ_c/l_0 |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---|------------------------|-------------------------------------|--|
| 35 | 9 | 6 | 0,10 | 1 | 2,579 |
| 35 | 3 | 2 | 0,40 | 7 | 0,062 |
| 35 | 3 | 2 | 0,10 | 7 | 0,042 |
| 35 | 3 | 8 | 0,10 | 7 | 0,101 |
| 35 | 3 | 8 | 0,40 | 7 | 0,142 |
| 35 | 9 | 8 | 0,40 | 7 | 0,145 |
| 35 | 9 | 2 | 0,40 | 7 | 0,123 |
| 35 | 9 | 2 | 0,10 | 7 | 0,063 |
| 35 | 9 | 8 | 0,10 | 7 | 0,129 |
| 35 | 3 | 8 | 0,10 | 1 | 2,560 |
| 35 | 3 | 2 | 0,40 | 1 | 2,558 |
| 35 | 3 | 2 | 0,10 | 1 | 1,851 |
| 35 | 3 | 8 | 0,40 | 1 | 2,616 |
| 35 | 9 | 8 | 0,10 | 1 | 2,540 |
| 35 | 9 | 2 | 0,10 | 1 | 2,525 |
| 35 | 9 | 2 | 0,40 | 1 | 2,647 |
| 35 | 9 | 8 | 0,40 | 1 | 2,434 |
| 65 | 3 | 2 | 0,40 | 7 | 0,050 |
| 65 | 3 | 2 | 0,10 | 7 | 0,037 |
| 65 | 3 | 8 | 0,10 | 7 | 0,182 |
| 65 | 3 | 8 | 0,40 | 7 | 0,167 |
| 65 | 9 | 8 | 0,40 | 7 | 0,245 |
| 65 | 9 | 2 | 0,40 | 7 | 0,258 |
| 65 | 9 | 2 | 0,10 | 7 | 0,179 |
| 65 | 9 | 8 | 0,10 | 7 | 0,250 |
| 65 | 3 | 8 | 0,10 | 1 | 4,357 |
| 65 | 3 | 2 | 0,40 | 1 | 4,738 |
| 65 | 3 | 2 | 0,10 | 1 | 4,879 |
| 65 | 3 | 8 | 0,40 | 1 | 4,296 |
| 65 | 9 | 8 | 0,10 | 1 | 6,354 |
| 65 | 9 | 2 | 0,10 | 1 | 7,635 |
| 65 | 9 | 2 | 0,40 | 1 | 7,598 |
| 65 | 9 | 8 | 0,40 | 1 | 5,635 |

ANNEXE 5

Mesures ajoutés par algorithme d'apprentissage à l'estimation du flambage

| Angle tressage $\pm\theta$ (°) | Nombre de spires active N | Débattement par spire p/d_{ext} | Rapport e/d_{ext} | Élancement du ressort l_0/D | Réponse au flambage δ_{cr}/l_0 | Erreur moyenne % |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---|------------------------|-------------------------------------|---|------------------------|
| 50 | 7 | 2 | 0,10 | 4 | 0,143 | 56,27 |
| 55 | 5 | 3 | 0,40 | 4 | 0,202 | 54,06 |
| 50 | 9 | 8 | 0,20 | 4 | 0,200 | 51,53 |
| 50 | 9 | 8 | 0,40 | 5 | 0,158 | 51,40 |
| 50 | 9 | 2 | 0,10 | 4 | 0,187 | 51,56 |
| 50 | 4 | 3 | 0,23 | 6 | 0,115 | 51,68 |
| 50 | 8 | 3 | 0,15 | 7 | 0,076 | 41,70 |
| 55 | 7 | 8 | 0,20 | 6 | 0,117 | 40,88 |
| 55 | 6 | 4 | 0,40 | 7 | 0,091 | 38,69 |
| 60 | 3 | 3 | 0,30 | 7 | 0,969 | 37,87 |
| 50 | 7 | 7 | 0,35 | 6 | 0,115 | 37,75 |
| 55 | 5 | 4 | 0,10 | 7 | 0,070 | 36,97 |
| 50 | 3 | 7 | 0,15 | 5 | 0,152 | 36,74 |
| 50 | 6 | 3 | 0,35 | 5 | 0,154 | 31,43 |
| 55 | 6 | 8 | 0,40 | 7 | 0,091 | 26,40 |
| 55 | 9 | 7 | 0,20 | 7 | 0,090 | 26,89 |
| 45 | 6 | 3 | 0,15 | 5 | 0,142 | 27,26 |
| 55 | 8 | 2 | 0,10 | 7 | 0,059 | 23,49 |
| 50 | 4 | 8 | 0,15 | 7 | 0,086 | 23,77 |
| 45 | 8 | 5 | 0,40 | 7 | 0,095 | 23,96 |
| 45 | 4 | 6 | 0,25 | 5 | 0,166 | 23,71 |
| 55 | 7 | 2 | 0,40 | 7 | 0,086 | 18,65 |
| 55 | 8 | 8 | 0,35 | 7 | 0,091 | 18,95 |
| 50 | 8 | 3 | 0,10 | 5 | 0,132 | 19,13 |
| 45 | 8 | 2 | 0,25 | 7 | 0,081 | 18,84 |
| 45 | 8 | 6 | 0,35 | 5 | 0,171 | 18,81 |
| 55 | 8 | 7 | 0,10 | 7 | 0,086 | 16,09 |
| 60 | 4 | 3 | 0,10 | 7 | 0,063 | 16,34 |
| 35 | 4 | 2 | 0,20 | 7 | 0,066 | 16,46 |
| 55 | 4 | 7 | 0,40 | 7 | 0,094 | 16,55 |
| 50 | 7 | 8 | 0,15 | 5 | 0,154 | 16,55 |
| 45 | 4 | 4 | 0,20 | 4 | 0,224 | 13,15 |
| 50 | 6 | 2 | 0,10 | 7 | 0,044 | 12,33 |
| 50 | 9 | 4 | 0,15 | 7 | 0,082 | 11,45 |
| 60 | 7 | 7 | 0,35 | 7 | 0,103 | 9,75 |

ANNEXE 6

Calcul pour la conception des ressorts hélicoïdaux métalliques

Le facteur de Wahl K dépend du paramètre C , or ce dernier n'est évaluable qu'en ayant la valeur de d . Afin de démarrer le calcul, il faut choisir arbitrairement une valeur de K entre 1.15 et 1.3 puis effectuer le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un couple (K, d) compatible.

Les étapes du calcul étant dans l'ordre :

1) évaluer d :
$$d = \sqrt[3]{cK \frac{8P_{\max} D}{\pi \tau_{\max}}} \quad (\text{obtenu en combinant les équations de la raideur et de la contrainte maximale}),$$

2) puis C :
$$C = \frac{D}{d},$$

3) réévaluer le facteur de Wahl : $K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C}$ puis réitérer le calcul.

Lorsque la valeur d ne varie plus de manière significative entre chaque itération, le nombre de spires utiles est donné par la formule (obtenu par l'équation de la raideur) :

$$N = \frac{dG}{8C^3k}$$

À partir de ce nombre, la hauteur du ressort à bloc (c'est à dire dans la situation où le ressort se présente les spires collées les unes contre les autres) est calculable par l'expression :

$$H_B = d(N + N_e) - \frac{d}{2}$$

où N_E est le nombre de spires inactives au niveau des extrémités afin d'assurer une bonne répartition des efforts dans le ressort. Les bases renforcées (équarries) ou meulées ne contribuent pas à la raideur du ressort. Le tableau 1 donne la valeur de N_E en fonction de la forme des bases :

| Extrémité | Forme | N_E (pour 1 base) | N_E (2 bases) |
|---------------------------------------|--|------------------------|--------------------|
| Meulée | Sur $\frac{3}{4}$ de tour, l'extrémité est meulée et le pas est réduit à une valeur égale au diamètre d du fil | $\frac{3}{4}$ | $1\frac{1}{2}$ |
| Meulée et renforcée (ie: équerrie) | Sur $1\frac{1}{4}$ tour, le pas est égal au diamètre d du fil (extrémité meulée sur $\frac{3}{4}$ de tour) | $1\frac{1}{4}$ | $2\frac{1}{2}$ |
| | Pour chaque $\frac{1}{4}$ de renforcement supplémentaire (rare), il faut ajouter : | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

Tableau 1 : Nombre de spires inactives

On évalue la charge pour que le ressort soit comprimé à bloc en utilisant la relation de proportionnalité existante entre la charge à bloc P_B et la contrainte à bloc τ_a d'après l'expression suivante :

$$P_B = \frac{P_{\max} \tau_a}{\tau_{\max}}$$

Finalement la hauteur libre du ressort est donnée par :

$$H_L = H_B + \frac{1}{k} P_B$$

ANNEXE 7

État de l'art sur l'optimisation multicritère

Dans le domaine de la conception de structure, la démarche multicritère est idéale, puisque plusieurs intérêts contradictoires sont en jeu lors du processus d'optimisation. Ainsi dans la recherche des paramètres d'un ressort composite le plus léger possible, mais avec une constante de raideur suffisamment élevée, les objectifs sont en conflit (l'amélioration de l'un provoque la dégradation de l'autre). On a alors recours au concept de non dominance pour classer les différentes solutions en ensemble ordonnés, et dégager un ensemble de solutions optimales appelé ensemble de Pareto.

Comme mentionné au chapitre 1.3, un ensemble de points est dit optimal au sens de Pareto si, en se déplaçant parmi les points de l'ensemble, une amélioration dans l'une des fonctions-objectifs causera au moins une dégradation pour une autre. L'ensemble de Pareto peut contenir un nombre infini de points dans le cas de variables continues. La solution souhaitée doit alors être choisie dans cet ensemble par le concepteur.

I. Du multicritère au monocritère

i. Méthode des poids pondérés

L'approche la plus naturelle pour parvenir à cet ensemble de Pareto consiste à former une combinaison linéaire des m fonctions-objectifs pour n'en avoir plus qu'une seule et donc se placer dans un cas classique d'optimisation. On veut optimiser l'expression suivante :

$$F(X) = \sum_{i=1}^m a_i f_i(X) \text{ avec } \sum_{i=1}^m a_i = 1$$

où f_i est la $i^{\text{ème}}$ fonction-objectif. La somme des coefficients a_i est fixée à 1, et pour chaque combinaison (a_1, \dots, a_m) une optimisation classique mène à une solution. Cette approche pose cependant plusieurs problèmes. Son temps de résolution est élevé, car chaque point solution est le fruit d'une optimisation. Mais surtout pour des problèmes

complexes, l'ensemble de Pareto n'est obtenu que d'une façon incomplète, car elle ne peut donner que des surfaces de fronts convexes (Goel et Singh 1997).

ii. Méthode de la surface d'échange (trade-off)

Un premier objectif est optimisé tandis que des limites ϵ_i sont placées sur les autres fonctions-objectifs (alors traitées comme des contraintes additionnelles), puis les rôles sont inversés, jusqu'à ce que chaque fonction-objectif ait été optimisée. En faisant varier les limites ϵ_i de contraintes on aboutit à différentes solutions, formant l'ensemble de Pareto au final. Pour résumer la démarche sur une optimisation à 2 critères :

- a. Minimiser f_1 sous contraintes habituelles avec $f_2 < \epsilon_2$.
- b. Minimiser f_2 sous contraintes habituelles avec $f_1 < \epsilon_1$.

Le principal inconvénient de cette méthode vient du choix des limites ϵ_i , qui nécessitent une connaissance préalable du problème. En revanche on peut avoir accès à des fronts de Pareto non convexes par ce biais.

iii. Théorie des jeux

Dans cette approche on ajoute un paramètre β aux autres variables d'optimisation. Le problème se pose avec des coefficients de pondération a_i : on veut minimiser β sous les contraintes habituelles avec $a_i f_i(X) < \beta$ pour les m fonctions-objectifs. Là encore une valeur de β doit être donnée au début, selon la connaissance préalable du problème. Une mauvaise valeur initiale crée des problèmes de convergence.

II. Optimisation purement multicritère

Comme on vient de le voir, les problèmes multicritères sont classiquement ramenés à des problèmes monocritères, soit en combinant les objectifs entre eux, soit en faisant passer certains objectifs en contraintes. Néanmoins les progrès récents dans le domaine des stratégies d'évolution permettent de mener des optimisations rigoureusement multicritères, qui présentent plusieurs avantages :

- On peut obtenir l'ensemble de Pareto en entier **en une seule optimisation**.

- En maintenant la diversité de la population on s'assure que les points recouvrent **l'ensemble du front Pareto**, sans aucune connaissance préalable du problème.

Ainsi l'optimisation multicritère utilisant les stratégies évolutives s'est popularisée au cours des dernières années. Les rappels théoriques sur ces stratégies sont effectués à la section 4.3. Voici un aperçu des principales approches développées :

- **VEGA** (Vector Evaluated Genetic Algorithm): Schaffer (1985) a modifié l'opérateur de mutation pour générer, des solutions performantes pour chacun des k critères séparément. On croise alors les k sous-populations entre elles.
- **Le triage lexicographique** : Le concepteur classe les critères par ordre d'importance. La recherche de l'optimum débute par la minimisation du critère le plus important, puis du second, etc.
- **La somme pondérée** : Hajela et Lin (1992) incluent les poids de chaque critère dans le codage des individus, et font varier ces poids d'un individu à l'autre. Ainsi ils génèrent l'ensemble optimal de Pareto en un simple calcul.
- **MOGA** (Multiobjective Optimization Genetic Algorithm): (Fleming et Fonseca 1993) ont proposé un schéma donnant à chaque individu un rang correspondant aux nombres d'individus de la population qui le dominant.
- **Algorithme génétique placé par Pareto** : (Horn; Nafpliotis, et Goldberg 1994) propose de faire la sélection en comparant des individus, par les critères de dominance de Pareto, à un ensemble d'individus choisis aléatoirement. Lorsqu'il y a égalité de domination, la fonction de partage des ressources tranche.